

الواجب

١١ اوجه اهداش النقطه ه الى
تقع خارج المكافه م م الى ن
حيث م = (٢١٢) ل = (١٦) = (١٦)

١٢ اذا كانت م = (١٢٣)
ن = (١٥١) اوجه اهداش
نقطه ه الى تقع منه لم لمافه
م م الى ن اوجه اهداش

١٣ اذا كانت م = (١٢٣) = (١٢٣)
ن = (١٥١) وكانت م م م
حيث م م م م م م
فاوجه اهداش ه اذا كانت
١ التقسيم من الداخل
٢ التقسيم من الخارج

١٤ اذا كانت م ل م
ثلاث نقطه تقع على متتامه واحد
حيث م = (١٥١) ل = (١٥١)
م = (١٤١) م
اوجه اهداش الى تقسم بطول
النقطه م القطع المتقيد م
موضعا نوعي التقسيم ثم اوجه
فيه م

١٥ م م متوازي اضلاعي
فيه م = (١٥١) ل = (١٥١)
م = (١٥١) اوجه اهداش
الرأس د

١٦ اوجه اهداش النقطه ه الى
تقع عند مفصل المكافه م والنقطه
م = (١٥١) ل = (١٥١) م = (١٥١)

فكر يا معلم

١٧ اذا كانت م = (١٥١)
ن = (١٥١) م = (١٥١)
م م م م م م
حيث م م ينصف (م) م الى اهل
اوجه اهداش النقطه د

١٨ اذا كانت م = (١٥١)
ن = (١٥١) اوجه اهداش النقطه
م اذا كانت م م م م
م م م م م م

معادلة الخط المستقيم

٥) ظل الزاوية (طاه) = ١٢

يصنع ط مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

أستنتج ظل ط بالك

لو صنع ط مع الاتجاه الموجب

محور الصادات

: الميل = ظل ط = (٩.٠ + ٣.٠) = ٣٧ - ٠

٦) معادلي المستقيم معلوم

$$١٣ = ٢م$$

٧) معادلي على مستقيم معلوم

$$١٣ \times ٢م = ١$$

١) ميل الموازي لمحور السينات = صفر

= المعود على محور الصادات

٩) الميل الموازي لمحور الصادات غير معرف

= المعود على محور السينات

ملحوظة هامة

لتكوين الصور المختلفة نحتاجين

نقطة ص و متجه الاتجاه

تذكر معنا



كيفية إيجاد الميل

١) إذا المعطى بمركبتين

نأخذ (ص، م) و (ص، م)

الميل = فرق الصادات / فرق السينات = $\frac{ص٢ - ص١}{م٢ - م١}$

٢) نقطة واحدة و متجه اتجاه

نأخذ (ص، م) الميل = $\frac{ص}{م}$

٣) على الصورة المعادلة

$$ص = م + م$$

الميل = الجزء المقطوع

٤) ص = م من طرف واحد

الميل = $\frac{\text{معامل ص}}{\text{معامل م}}$

$$٢ = ٣ + ٤م - ٧$$

الميل = $\frac{٢}{٣} = ١ -$

$$٥ = ٣ + ٤م - ٥ = ٥ - ٤م$$

٥ = ٤م

المصطفى فوزي سيد

مثال ١ اوجد الصور المختلفة

لمعادلة المتقيم العام بالنقطة
(١٥) وعودى على المتقيم

$$3x - y - 1 = 0$$

ميل المتقيم المحط = $\frac{3}{1}$

ميل المتقيم المطلوب = $\frac{1}{3}$

الموجه (٥٤) الميل = $\frac{1}{3}$

الموجه = (٣-١٣) الميل = $\frac{1}{3}$

رجعنا لأمثارتها

١ معادلة الموجه = $r = 0$ له y

$$r = (15) + (13 - 1) = 0$$

٢ المعادلتان الوسيطيتان $3x + 5y = 15$ و $2x + 5y = 10$

$$3x + 5y = 15$$

٣ المعادلة الكا، تيزية

$$\frac{3x - y - 1}{2} = \frac{3x + 5y - 15}{2}$$

$$3x - y - 1 = 3x + 5y - 15$$

سبحان الله وبحمده

سبحان الله العظيم

مثال ٢ اوجد الصور المختلفة

لمعادلة الخط المتقيم الذي يمر بالنقطة
(٣-٢) والموجه $y = 120$

فيه اتجاه له

الحل

$$1) \text{ تر } = (2 - 3) + (120 - 1) = 0$$

٢ المعادلتان الوسيطيتان

$$3x - 2 = 120 - 1$$

٣ المعادلة الكا، تيزية

$$\frac{3x - 2}{1} = \frac{120 - 1}{1}$$

$$\frac{3x - 2}{1} = \frac{120 - 1}{1}$$

$$3x - 2 = 120 - 1$$

$$3x - 2 = 120 - 1$$

٤ اوجد الصور المختلفة لمعادلة

المتقيم العام بالنقطة (٣-٥)

والموجه (١٢) فجه اتجاه له

٥ اوجد الصور المختلفة لمعادلة المتقيم

العام بالنقطة (٣-١١) وموازي للمستقيم

$$3x - 2 = 120 - 1$$

خلي بالك

مثال ٣ اوجد معادله المستقيم
(صورة مختلفة) الذي يمر بالنقطة
(٣، ٣) ويصنع زاوية موجبة قياسها
٤٥ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل:

الميل = $\tan 45 = 1$: (١، ١) متجه اتجاه
المحور
المحور = $(3, 3) + (1, 1)$

والوسيطاته $u = 3 + 1 = 4$
 $v = 3 + 1 = 4$

أيضا، $\frac{3-u}{1} = \frac{3-v}{1}$

أي $u = v = 0$

اوجد الصور المختلفة لمعادله
المتقيم الماء بالنقطة (٢، ٢)
ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور
السينات زاوية قياسها ١٢٠

الحل:

١) معادله محور السينات $v = 0$

٢) معادله محور الصادات $u = 0$

٣) معادله المتقيم الماء بالنقطة (٢، ٢)
موازي

محور السينات $u = 2$
محور الصادات $v = 2$

٤) معادله المتقيم الماء بالنقطة
الاهل (٠، ٠) متجه اتجاه u

١) المتجه $u = 0$ أي

٢) العامة $u = 2$ أي

٥) المتقيم الموازي لمحور الصادات

يكون متجه اتجاه له (١، ٠)

٦) المتقيم الموازي لمحور السينات
يكون متجه اتجاه له (٠، ١)

٧) المتقيم $u = 2 + v + u + v = 0$

المتجه العمودي عليه (٢، ٢)

متجه اتجاهه (٢، ٢)

فتكون $u = 2 + v + u + v = 0$

العمودي عليه (٢، ٢) متجه اتجاهه (٢، ٢)

$$1 = \frac{u}{m} + \frac{v}{n}$$

٢. اجزء المقطوع من محور السينات
٣. اجزء المقطوع من محور الصادات

٩. لايجاد نقطة تقاطع المستقيم مع
محور السينات نضع $v = 0$
(منعوض عن $v = 0$)

١٠. لايجاد نقطة تقاطع المستقيم مع
محور الصادات نضع $u = 0$
(منعوض عن $u = 0$)

مثال ١ إذا كانت $P = (2, 0)$

$$u = (1, 1) \quad v = (3, -1) \quad \text{ثلاث}$$

نقطة في المستوى فأوجد معادله للتجربة
للخط المستقيم $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ ثم أثبت أن P تقع على استقامه واحدة

الحل

$$\text{ميل } \vec{r} = \frac{v_2 - u_2}{v_1 - u_1} = \frac{0 - 1}{1 - 3} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \vec{r} = (1, 1) + t(1, -1)$$

$$\therefore \vec{r} = (1, 1) + t(1, -1)$$

$$\text{ثانياً ميل } \vec{r} = \frac{1 - 3}{1 - 3} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{ميل } \vec{r} = \text{ميل } \vec{r}$$

$\therefore P$ تقع على استقامه واحدة

مثال ٢ \vec{r} قطر في الدائرة M

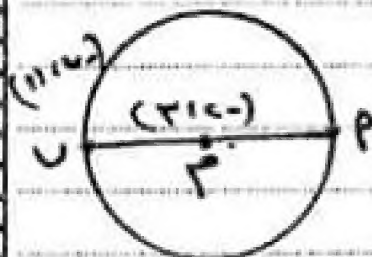
$$\text{وكانه } u = (-1, 1) \quad v = (3, -1)$$

فأوجد معادلة المماس للدائرة عند
نقطة M

الحل

نفرض أن

$$M = (u, v)$$



أرجع بالذاكرة شوية

فإن المماسات مماسات القطع المستقيمة

$$\therefore \frac{v - u_2}{u - u_1} = \frac{v - (-1)}{u - 3} = \frac{-1 - 1}{1 - 3} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\frac{v - u_2}{u - u_1} = \frac{v - (-1)}{u - 3} = \frac{-1 - 1}{1 - 3} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$v - u_2 = u - u_1$$

$$v - (-1) = u - 3$$

$$\therefore M = (3, -1)$$

المماس يمر بالنقطة P ويكون عمودي

على \vec{MP}

$$\text{ميل } \vec{r} = \frac{v_2 - u_2}{v_1 - u_1} = \frac{-1 - 1}{1 - 3} = \frac{-2}{-2} = 1$$

ميل المماس $= \frac{1}{1} = 1$ (هنا قلب
ونغير الإشارة)

$$\therefore \text{معادله المماس } y - 1 = 1(x - 1)$$

$$\therefore y - 1 = x - 1 \Rightarrow y = x$$

تابع حل مثال ٥

$$8(5 + 4s) = 5(2 - s)$$

$$40 + 32s = 10 - 5s$$

$$37s = -30 \Rightarrow s = -\frac{30}{37}$$

$$\therefore s = -\frac{30}{37} \Rightarrow 8(5 + 4s) = 5(2 - s)$$

مثال ٦ إذا كان

$$L_1: 2x - y = 5$$

$$L_2: 3x + 4y = 7$$

فأوجد له عندما ① $L_1 \parallel L_2$

② $L_1 \perp L_2$

الحل

$$\text{ميل } L_1 = 2 \Rightarrow \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{① } L_1 \parallel L_2 \Rightarrow \text{ميل } L_2 = 2 \Rightarrow 3 = 2 \Rightarrow \text{لا يوجد}$$

$$\boxed{2 = 2}$$

$$\text{② } L_1 \perp L_2 \Rightarrow 2 \times 3 = -1 \Rightarrow 6 = -1 \Rightarrow \text{لا يوجد}$$

$$\frac{2}{1} \times \frac{3}{4} = -1 \Rightarrow \frac{6}{4} = -1 \Rightarrow \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow \text{لا يوجد}$$

مثال ٧ إذا قطع المتقيم

٢٤ + ٤س = ١٢ محور السينات
من ٢ ما ٥ فأوجد

① إحداثيات ٢

② ما ٥ و ١٢ حيث ونقطه الأصل

الحل

نقسمه على ١٢

$$\frac{24}{12} = \frac{4s}{12} + \frac{12}{12}$$

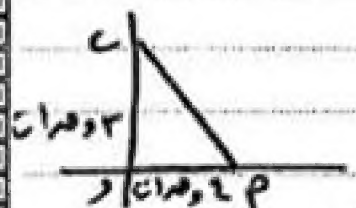
$$2 = \frac{s}{3} + 1$$

① الجزء المقطوع من السينات
② الجزء المقطوع من الصادات

يقطع محور السينات ٤ وحدات (٢٤)

يقطع محور الصادات ٢ وحدات (١٢)

③ ما ٥ و ١٢



$$\frac{1}{2} \text{ القاعدة } \times \text{ الارتفاع} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

أو وجد طولى الخطين المقطوعين من

المحورين بواسطة المتقيم

$$24 + 4s = 12 \Rightarrow 4s = -12 \Rightarrow s = -3$$

أو جد ما ٥ المثلث المحدب بالمتقيم

$$24 + 4s = 12 \Rightarrow 4s = -12 \Rightarrow s = -3$$

قياس الزاوية بين متجهين

مثال اوجد قياس الزاوية الحادة

بين المتجهين \vec{a} و \vec{b} حيث $\vec{a} = 1\vec{i} + 2\vec{j}$

و $\vec{b} = 2\vec{i} + 1\vec{j}$ حيث \vec{i} و \vec{j} متجهان

الحد

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

و $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{4}{\sqrt{5} \sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1} \left(\frac{4}{5} \right) = \cos^{-1} 0.8$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1} 0.8 = 36.87^\circ$$

$$\text{Shift} + \tan^{-1} \left(\frac{3}{4} \right)$$

$$\therefore \theta = 36.87^\circ$$

اوجد قياس الزاوية الحادة بين

المتجهين $\vec{a} = 1\vec{i} + 2\vec{j}$ و $\vec{b} = 2\vec{i} + 1\vec{j}$

حيث \vec{i} و \vec{j} متجهان الحد

اوجد الزاوية الحادة بين

المتجهين $\vec{a} = 1\vec{i} + 2\vec{j}$ و $\vec{b} = 2\vec{i} + 1\vec{j}$

$$\text{والحارة } (1, 2) \text{ و } (2, 1)$$

المتجهين $\vec{a} = 1\vec{i} + 2\vec{j}$ و $\vec{b} = 2\vec{i} + 1\vec{j}$

$$\therefore \theta = \cos^{-1} \left(\frac{4}{5} \right) = \cos^{-1} 0.8$$

01118275262

٤٤

المصطفى فوزي سيد

$$\text{ظاه} = \left| \frac{2-1}{2 \times 1 + 1} \right|$$

ملاحظات

١) إذا كان الظل موجباً فاندنا فعل على الزاوية الحادة

٢) إذا كان ظاه = صفر فاده 90° يعني المتجهان متوازيان أو قطبعان

٣) إذا كان ظاه غير معرف أي $\frac{0}{0}$ فاده قياس الزاوية بينها 90° والمتجهان متعامدان

٤) قياس الزاوية المنفرجة

$$= 180^\circ - \text{الحادة}$$

على بالك وراجع كل قوانين

الميل من الدرس اللغات

لتحديد نوع المثلث من حيث زواياه

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 < |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \text{ (منفرج من } \theta)$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 > |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \text{ (حاد من } \theta)$$

مثال ٣ $U \cap P = \emptyset$ فيه $P = \{0, 1\}$

$U = \{1, 2, \dots, 100\}$ $P = \{1, 2, \dots, 100\}$

١) أثبت أنه المثلث متساوي الساقين

٢) اكتب P

٣) اكتب ما هو $U \cap P$

الحل



١) قانوهم البعد بين نقطتين

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$UP = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$

$UP = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$

$UP = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$

$\therefore UP = UP$ $\therefore U \cap P = \emptyset$ متساوي الساقين

٢) ميل $UP = \frac{1-0}{1-0} = 1$

ميل $UP = \frac{1-0}{1-0} = 1$

$\therefore P = \frac{1-0}{1-0} = 1$

$P = \{1\}$

٣) ما هو $U \cap P$ $U \cap P = \emptyset$

$\frac{1}{2} \times 100 = 50$

بـ ١٠٠ مرة مربعة

مثال ٤ إذا كانه قياس الزاوية

الحادة بين المستقيمين

$U + P = 180^\circ$ $U = 180^\circ - P$

الحل

$120^\circ + P = 180^\circ$

$P = 60^\circ$

$\therefore P = 60^\circ$

$\therefore P = 60^\circ$

$\therefore P = 60^\circ$

$\therefore P = 60^\circ$

$\therefore P = 60^\circ$

$\therefore P = 60^\circ$

$\therefore P = 60^\circ$

$\therefore P = 60^\circ$

٢) إذا كانه الزاوية بين المستقيمين

$U + P = 180^\circ$

$U + P = 180^\circ$

تساوي $U + P = 180^\circ$ فأنه مربعة

طول القوس من نقطة الى مستقيم

(القانون المستخدم)

$$L = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

غلي بالك إذا كانت $L = 0$ صفر فأنه النقط تقع على المستقيم

بعد المستقيم عن محور السينات = $|A \text{ الصادي}|$

بعد النقط عن محور الصادات = $|A \text{ السين}|$

مثال اوجد طول القوس المرسوم من النقط (١٢٣) الى الخط المستقيم $2x + 3y - 5 = 0$.

الحل

$$A = 2, B = 3, C = -5, x = 1, y = 3$$

$$L = \frac{|2(1) + 3(3) - 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|2 + 9 - 5|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{|6|}{\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$$

$$L = \frac{6}{\sqrt{13}} = 1.66 \text{ وحدة طول}$$

اصب طول القوس المرسوم من النقط (١٢١) الى الخط المستقيم $2x + 3y - 5 = 0$.

الحل

$$L = \frac{|2(1) + 3(1) - 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|2 + 3 - 5|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{0}{\sqrt{13}} = 0$$

مثال أوجد طول الوتر

المرسوم من النقط (٣، ١) إلى

النقطة (١٠، ١) = (١٠، ١) + (٣، ١)

الحل

نوجد أولاً معادلة المستقيم في الصورة العامة

$$\frac{y - 1}{x - 3} = \frac{1 - 1}{10 - 3} \Rightarrow \frac{y - 1}{x - 3} = 0 \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$0 = 5 - 3y \Rightarrow 3y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{3}$$

$$0 = 5 - 3y \Rightarrow 3y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{3}$$

$$1 = 1 \quad 2 = 1 \quad 1 = 1$$

أكملت

مثال احب ماحه الدائره التي مركزها م (١٠، ١) ونحس

المستقيم $5 = 14 + 3 + 6 = 23$

الحل

نقطة = بعد بيت المركز م والمحاس

$$1 = 14 + 3 + 6 = 23$$

$$1 = 14 + 3 + 6 = 23$$

ماحه الدائره = πr^2 نقطة

$$= \pi r^2$$

أثبت أنه المستقيم

$$r = (3, 1) + (10, 1) = (13, 2)$$

$$r = 11 - 3 + 1 = 9$$

متوازياته ثم احب البعد بينها

الحل

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$13 = 13 \Rightarrow \text{المستقيم متوازياته}$$

$$(3, 1) \Rightarrow 1$$

$$11 - 3 + 1 = 9$$

$$11 - 3 + 1 = 9$$

$$11 - 3 + 1 = 9$$

مثال اثبت أن النقطتين

$$(1, 1) \text{ و } (2, 2) \text{ تقعان على جانبي}$$

مختلفين من الخط المستقيم $2 = 3 + 4 = 7$

وعلى بعدين متساويين منه

الحل

بعد النقط (١، ١) من المستقيم

$$1 = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

بعد النقط (٢، ٢) من المستقيم

$$1 = \frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

من ١ و ٢ الاشارة انه مختلفان

ومتساويته من المقامات يقعان على جانبي مختلفين

المعادلة العامة للمستقيم الحار بنقطة تقاطع مستقيمين

الفكرة بتكبير المستقيم الاول + له x الثاني وتعوض بالنقطة
وتطلع قيمة له وتجمع التشابه

معادله المستقيم هي

$$y = 3x - 18$$

$$+ \frac{1}{12} (y - 5 - 3x + 18) = 0$$

$$\text{بترتيب } x$$

$$y = 3x - 18$$

$$y = 3x - 18$$

منجمع

$$y = 3x - 18$$

او معادله العامة للمستقيم
الحار بنقطة تقاطع المستقيمين

$$y = 3x - 18$$

الحل

مثال

اوجد معادله المستقيم
الحار بنقطة تقاطع المستقيمين

$$y = 3x - 18$$

$$\text{ويجرب نقطه } (3, 0)$$

الحل

المعادله العامة

$$y = 3x - 18$$

$$y = 3x - 18$$

$$y = 3x - 18$$

$$\text{ويجرب نقطه } (3, 0)$$

$$\text{منعو من } y = 3x - 18$$

$$y = 3x - 18$$

$$y = 3x - 18$$

$$y = 3x - 18$$

$$\frac{1}{12} = 0$$

المتحوي من مسائل (1)

$$\begin{aligned} 2 - 3 &= 3 - 3 \\ 2 - 3 &= 3 - 3 \\ 2 - 3 &= 3 - 3 \\ \boxed{2} &= \boxed{3} \end{aligned}$$

نقطة التقاطع هي (2, 3)

الواجب حل تمارين الكتاب
الدرس كاملة وتسلم الحصة القادمة

انتهى المنهج

بفضل الله

مع اهيب وارق تمنياتي

العالية بالنجاح والتوفيق

م/مصطفى فواز سيد

مثال: أثبت أن المعادلة

$$\begin{aligned} 2 - 3 &= 3 - 3 \\ 2 - 3 &= 3 - 3 \\ 2 - 3 &= 3 - 3 \\ \boxed{2} &= \boxed{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 - 3 &= 3 - 3 \\ 2 - 3 &= 3 - 3 \\ 2 - 3 &= 3 - 3 \\ \boxed{2} &= \boxed{3} \end{aligned}$$

المستقيما متعامدا
المعادلة الخطية المستقيمة

$$\begin{aligned} 2 - 3 &= 3 - 3 \\ 2 - 3 &= 3 - 3 \\ 2 - 3 &= 3 - 3 \\ \boxed{2} &= \boxed{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 - 3 &= 3 - 3 \\ 2 - 3 &= 3 - 3 \\ 2 - 3 &= 3 - 3 \\ \boxed{2} &= \boxed{3} \end{aligned}$$

تنظيم البيانات في مصفوفات

تعريف المصفوفة :-

هي ترتيب لعدد من العناصر (متغيرات أو أعداد) في صفوف و أعمدة محصورة بين قوسين

أولاً : ملاحظات :

- * تنظم العناصر في المصفوفة بحيث يكون موقع كل منها في المصفوفة ذا معنى
- * يرمز للمصفوفة عادة بالأحرف الكبيرة مثل : (P , B , C , S , V , ...)
- و يرمز لعناصرها بالأحرف الصغيرة مثل : (p , b , c , s , v , ...)
- * عدد الصفوف و عدد الأعمدة يحدد أبعاد المصفوفة أو نظمها
- فإذا كان : عدد صفوف المصفوفة = m ، عدد الأعمدة = n
- فإن : المصفوفة على النظم $m \times n$ حيث : m, n أعداد صحيحة موجبة

مثال ١
$$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} , C = [5 \ 0 \ 1]$$

المصفوفة P على النظم 2×2 المصفوفة B على النظم 2×2 المصفوفة C على النظم 1×3

- * يعبر عن العنصر داخل المصفوفة P على الصورة ($P_{ص.ع}$) حيث :
- ص.ع هما الصف و العمود الذي يقع فيه العنصر على الترتيب
- * تتميز المصفوفة بالسرعة و الدقة لمعرفة المعلومات و تسهل اتخاذ القرارات

مثال ٢ إذا كانت :
$$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

أكتب نظم P ثم أوجد $P_{13} , P_{22} , P_{33} , P_{31}$

الحل

نظم P هو 3×3 ، $P_{13} = 7$ ، $P_{22} = 0$ ، $P_{33} = 2$ ، $P_{31} = 0$ ، $P_{11} = 2$

تمثيل المصفوفات

إذا كانت P مصفوفة على النظم 2×3 وه فإنه يمكن كتابة المصفوفة P على الصورة :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

و تقتصر دراستنا على الحالات التي فيها $2 \geq 3$ ، $3 \geq 2$

مثال ٣

اكتب المصفوفة P ($P_{2 \times 3}$) التي على نظم 3×2 حيث :

$$P_{21} = 1 + P_{12} - P_{23}$$

الحـل

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \end{pmatrix} = P \quad \text{المصفوفة } P \text{ على نظم } 2 \times 3$$

$$\begin{aligned} P_{21} &= 1 + P_{12} - P_{23} \\ P_{11} &= 1 + 2 - 3 = 0 \\ P_{22} &= 1 + 1 - 2 = 0 \\ P_{12} &= 1 + 1 - 2 = 0 \\ P_{23} &= 1 + 2 - 2 = 1 \\ P_{13} &= 1 + 3 - 1 = 3 \\ P_{21} &= 1 + 2 - 2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P$$

تنظيم البيانات الإحصائية باستخدام المصفوفات

مثال ٤

يبين الرسم البياني المقابل :

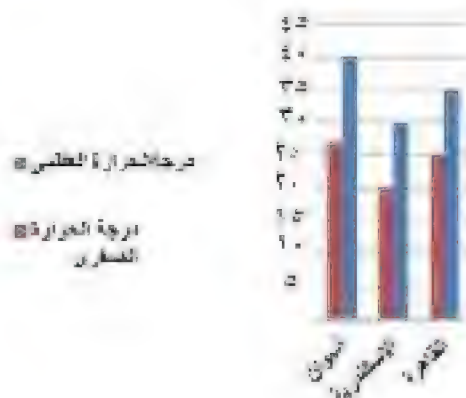
درجات الحرارة العظمى و

الصغرى لبعض مدن مصر

اكتب مصفوفة تمثل بيانات

الرسم البياني المقابل

الحـل



نفرض أن كل صف يمثل المدينة

و كل عمود يمثل مستوى درجات

الحرارة العظمى و الصغرى

فتكون المصفوفة كما يلي :

أسوان الإسكندرية القاهرة

$$\begin{pmatrix} 40 & 35 & 30 \\ 25 & 20 & 15 \end{pmatrix}$$

و هي مصفوفة على النظم 2×3

بعض المصفوفات الخاصة

١- مصفوفة الصف \Rightarrow هي المصفوفة التي تتكون من صف واحد فقط و أي عدد من الأعمدة

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ على النظم } 1 \times 3$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ على النظم } 1 \times 2$$

٢- مصفوفة العمود \Rightarrow هي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد فقط و أي عدد من الصفوف

$$M = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ على النظم } 4 \times 1, M = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ على النظم } 2 \times 1$$

٣- المصفوفة المربعة \Rightarrow هي المصفوفة التي فيها عدد الصفوف = عدد الأعمدة

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ مصفوفة مربعة على النظم } 2 \times 2$$

$$M = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \text{ مصفوفة مربعة على النظم } 3 \times 3$$

\Rightarrow ملاحظة: القطر الذي تقع عليه العناصر التي فيها رقم الصف = رقم العمود

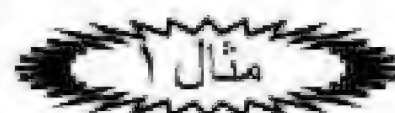
يسمى القطر الرئيسي

٤- المصفوفة الصفرية \Rightarrow هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار و قد تكون مربعة أو لا تكون

و يرمز لها " بمستطيل صغير " \square

$$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \text{ مصفوفة صفرية على النظم } 1 \times 1$$

$$\begin{bmatrix} : \\ : \\ : \end{bmatrix} \text{ مصفوفة صفرية على النظم } 3 \times 1$$



٥- المصفوفة القطرية \Rightarrow هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ماعدا عناصر القطر الرئيسي فيكون

أحدها على الأقل مغايراً للصفر (لا يكون صفراً)

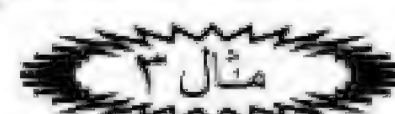
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ مصفوفة قطرية على النظم } 3 \times 3$$



٦- مصفوفة الوحدة (I) هي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيسي متساوية و كل منها = ١

و باقي العناصر أصفار

$$\text{المصفوفات } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ هي مصفوفة وحدة}$$



تساوي مصفوفتين

تساوي مصفوفتان ١. ب إذا كانت على نفس النظم و كان كل عنصر في المصفوفة ٢ مساويا نظيره في المصفوفة ب أي أن : $a_{ij} = b_{ij}$ لكل i, j

مثال ٤

$$(1) \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \text{ إذا وفقط إذا كانت : } 3 = 3, 9 = 9, 5 = 5, -2 = -2$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \text{ لأنهما ليستا على نفس النظم}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ لأنهما على نفس النظم و عناصرهما المتناظرة متساوية}$$

استخدام المصفوفات المتساوية في حل المعادلات

مثال ١

$$\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x + 2 & 5y \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \text{ إذا كان :}$$

أوجد قيم : x, y, z

الحل

١. المصفوفتان متساويتان ٢. العناصر متناظرة الأوضاع متساوية

$$(1) \quad 3x + 2 = 9 \quad (2) \quad 5y = 7$$

$$\text{بضرب (1) } \times 5 \quad \text{و بالجمع ينتج :} \quad 15x + 10 = 45 \quad \therefore 15x = 35 \quad \therefore x = \frac{7}{3}$$

$$\text{و بالتعويض في (1) ينتج : } 5y = 7 \quad \therefore y = \frac{7}{5}$$

$$\therefore x = \frac{7}{3} \quad y = \frac{7}{5} \quad z = 4$$

ضرب عدد حقيقي في مصفوفة

ضرب عدد حقيقي في مصفوفة يعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في العدد الحقيقي

أي أن : حاصل ضرب عدد حقيقي k في مصفوفة M من النظم $m \times n$

في مصفوفة M $= k \times M$ على نفس النظم $m \times n$

وكل عنصر فيها a_{ij} يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة M مضروباً بالعدد الحقيقي k

$$\text{أي أن : } (k \times M)_{ij} = k \times a_{ij}$$

$$\text{حيث : } 1 = 1 \times 1, 2 = 2 \times 1, 3 = 3 \times 1, 4 = 4 \times 1, 5 = 5 \times 1, 6 = 6 \times 1, 7 = 7 \times 1, 8 = 8 \times 1, 9 = 9 \times 1$$

مثال ٢

إذا كانت : $S = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ، $K = 3$ ،
الحل

$$\text{فإن : } K \cdot S = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot 3 = \begin{pmatrix} 21 & 3 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

ملاحظة : يمكن إخراج عامل مشترك خارج المصفوفة بقسمة جميع عناصر المصفوفة على هذا العدد

مدور المصفوفة

لأي مصفوفة M على النظم $M \times M$ إذا بدلنا الصفوف بالأعمدة أو الأعمدة بالصفوف بنفس الترتيب فإننا نحصل على مدور المصفوفة $|M|$ ويرمز لها بالرمز $(M)^T$ وتكون على النظم $M \times M$

ملاحظات : * إذا كانت : M على النظم $M \times M$ فإن : M^T تكون على النظم $M \times M$

$$* \text{العنصر } M_{ij} = M_{ji} \quad * (M^T)^T = M$$

مثال ٣

إذا كانت : $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ أوجد P^T
الحل

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

المصفوفات المتماثلة و شبه المتماثلة

إذا كانت M مصفوفة مربعة فإنها تسمى متماثلة إذا وفقط إذا كانت $M = M^T$
وتسمى شبه متماثلة إذا وفقط إذا كانت $M - M^T = 0$

بين أي المصفوفات التالية متماثلة وأيها شبه متماثلة :

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 5 & 9 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

الحل

$$\begin{aligned} S^T &= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 6 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix} \neq S \\ K^T &= \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \neq K \end{aligned}$$

∴ S مصفوفة متماثلة ، K مصفوفة شبه متماثلة

(١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة فيما يلي :

[١] إذا كانت : المصفوفة $P = (P_{ij})$ على النظم 3×2

وكان : $P_{11} = ص - ص ع + ٥$ فإن : $P_{11} = ٥٥٥٥$

(١) ٤ (٢) ٢ (٣) ٤ - (٤) ٢ -

[٢] إذا كانت : المصفوفة P على النظم 3×2 فإن : عدد عناصرها = ٥٥٥٥

(١) ٤ (٢) ٢ (٣) ٦ (٤) ٣

[٣] إذا كانت : المصفوفة P على النظم 3×2 فإن : P^T على النظم = ٥٥٥٥

(١) 3×2 (٢) 2×3 (٣) ٦ (٤) ٥

[٤] إذا كانت : المصفوفة P مربعة مكونة من ٣ صفوف فإن : عدد عناصرها = ٥٥٥٥

(١) ٣ (٢) ٩ (٣) ٦ (٤) ٥

[٥] إذا كانت : المصفوفة P مصفوفة مربعة مكونة من ٣ صفوف

فإن : P^T على النظم = ٥٥٥٥

(١) 3×2 (٢) 2×3 (٣) 3×3 (٤) ٩

[٦] إذا كانت : المصفوفة P مصفوفة عمود مكونة من صفين فإن : عدد عناصرها = ٥٥٥٥

(١) ١ (٢) ٢ (٣) ٣ (٤) ٤

[٧] إذا كانت : المصفوفة P مصفوفة عمود مكونة من صفين

فإن : P^T على النظم = ٥٥٥٥

(١) 1×2 (٢) 2×1 (٣) 2×2 (٤) ٤

$$[٨] \text{ إذا كانت : } \begin{bmatrix} ٣ - ٩ \\ ٦ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ - ١ + ٢ \\ ٦ ١ + ص \end{bmatrix}$$

فإن : $ص + ١ = ٥٥٥٥$

(١) صفر (٢) ١ (٣) ٢ (٤) ٤

$$[٩] \text{ إذا كانت : } \begin{bmatrix} ٣ + ب & ٣ \\ ٥ + ع & ١ - ٥ \\ ع & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ب & ٣ \\ ع & ١ - ٣ \end{bmatrix}$$

فإن : $ب + ع + ٣ + ٥ = ٥٥٥٥$

(١) ٤ - (٢) ٢ - (٣) ٢ (٤) ٤

(٢) أنتجت ثلاث شركات س ، ص ، ع ، نوعين من الأقمشة فكان ما أنتجته الشركة س عبارة عن ١٠٠٠ متر من النوع الأول ، ١٢٠٠ متر من النوع الثاني ، و ما أنتجته الشركة ص عبارة عن ٥٠٠ متر من النوع الأول ، ٩٠٠ متر من النوع الثاني ، و ما أنتجته الشركة ع عبارة عن ٧٠٠ متر من النوع الأول ، ٤٠٠ متر من النوع الثاني ، أكتب هذه البيانات في صورة مصفوفة (P) على النظم 2×3 .
و اكتب أيضاً هذه البيانات في صورة مصفوفة (ب) على النظم 3×2 .

(٣) محلان لبيع الملابس في أحد الأيام باع المحل الأول ٢٠ قميص ، ٥ بدل ، ١٢ حذاء ، و باع المحل الثاني ١٣ قميص ، ٣ بدل ، ١٤ حذاء ، أكتب هذه البيانات في صورة مصفوفة سـ على النظم 3×2

(٤) أكتب المصفوفة P (P مربع) التي على نظم 2×2 حيث :

$$P \text{ مربع} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

(٥) أكتب المصفوفة P (P مربع) التي على نظم 2×2 حيث :

$$P \text{ مربع} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

(٦) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ فأوجد قيمتي س ، ص

(٧) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ فأوجد قيم س ، ص ، ع

(٨) إذا كانت سـ = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ، صـ = $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ ،

هل من الممكن ان يكون : صـ = صـ ولماذا ؟

(٩) إذا كانت P = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ ،
أذكر نظم P ، ب ثم أوجد P ، بـ

(١٠) إذا كانت P = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ ،

و كان : P = بـ فأوجد س ، ص

(١١) أوجد قيم : س ، ص ، ع التي تجعل المصفوفتان متساويتان

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

طرح مصفوقستين

فإن : $\text{ص} - \text{ص} = \text{ص} + (-\text{ص})$ على نفس النظم $\text{م} \times \text{ه}$

مثال ٢ (إذا كانت : $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \text{مـ}$ ، $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \text{نـ}$ ،

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \text{ماتریس } A - \text{ماتریس } B$$



٥٠٠ محمية طرق المستشفيات ليست إيدالية وليست ديمقراطية

□ = إذا قلت : نعم - نعم = ☐ فلن : نعم = ☐

مثال ۳ (إذا كانت : $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \sim$ ، $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \sim$)
أوجد : $\sim - \sim$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \sim 5 - \sim 4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \sim 1 - \sim 1$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$(١) \text{ إذا كان : } \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \text{ح.} \quad \begin{bmatrix} ٢-١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \text{ح.} \quad \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} = \text{ح.} \\ \text{[٢] ح. - ح.} \quad \text{[١] ح. + ح.}$$

$$(٢) \text{ اختصر : } \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \text{ ح.} = \begin{bmatrix} ٢-١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \text{ ح.} + \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \text{ ح.}$$

$$(٣) \text{ إذا كان : } \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \\ \text{أوجد : } \text{ح.} + \text{ح.} + \text{ح.} + \text{ح.}$$

$$(٤) \text{ إذا كانت : } \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} = \text{ح.} \quad \begin{bmatrix} ٢-١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \text{ح.} \\ \text{فلوجد المصفوفة ح. بحيث : } \text{ح.} + \text{ح.} = \text{ح.} - \text{ح.} = \text{ح.} - \text{ح.}$$

$$(٥) \text{ إذا كانت : } \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} = \text{ح.} \quad \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} = \text{ح.} \\ \text{أوجد : } \text{ح.} + \text{ح.} + \text{ح.} - \text{ح.}$$

$$(٦) \text{ إذا كانت : } \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٢ \\ ٢-١ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{bmatrix} = \text{ح.} \quad \begin{bmatrix} ٢ & ٢-١ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ١ \\ ١ & ٢-٢ & ٢ \end{bmatrix} = \text{ح.}$$

أوجد المصفوفة ح. التي تحقق العلاقة $\text{ح.} + \text{ح.} = \text{ح.}$

$$(٧) \text{ إذا كانت : } \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} = \text{ح.} \quad \begin{bmatrix} ٢ & ٢-١ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} = \text{ح.}$$

فلوجد علامتين : $\text{ح.} + \text{ح.} = \text{ح.} - \text{ح.} = \text{ح.} - \text{ح.} = \text{ح.} - \text{ح.}$ إن أمكن

$$(٨) \text{ إذا كانت : } \begin{bmatrix} ٢-١ & ٢ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٢ \end{bmatrix} = \text{ح.} \quad \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٢ \end{bmatrix} = \text{ح.}$$

أوجد المصفوفة ح. التي تحقق العلاقة : $\text{ح.} + \text{ح.} = \text{ح.} - \text{ح.}$

$$(٩) \text{ إذا كانت : } \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢-١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} + \text{ح.} + \text{ح.} \\ \text{فلوجد المصفوفة ح.}$$

$$(١٠) \text{ إذا كان : } \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} - \text{ح.} \\ \text{أوجد : } \text{ح.} + \text{ح.} + \text{ح.} + \text{ح.}$$

$$(١١) \text{ إذا كانت : المصفوفة } \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٢-١ \end{bmatrix} \text{ هي المعكوس الجمعي للمصفوفة}$$

$$\begin{bmatrix} ١-٢ & ٢ \\ ٢ & ٢+١ \end{bmatrix} \text{ أوجد : } \text{ح.} + \text{ح.} + \text{ح.}$$

$$(١٢) \text{ أوجد قيم : ح. ، ح. التي تحقق المعادلة : } \begin{bmatrix} ٢ \\ ٢ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ \\ ٢ \\ ٢ \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفات

يمكن ضرب مصفوتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية
و عند ضرب $m \times n$ ، $n \times p$ مصفوفة من النظم $m \times n$ ، $n \times p$ مصفوفة من النظم $m \times p$ على
فإن : الناتج هو $m \times p$ حيث $C = AB$ مصفوفة على النظم $m \times p$ على

فإن : $س$ هي مصفوفة على النظم ٢×٢

ملحق ۱

- ١ - عملية ضرب المصفوفات تكون ممكنة (معروفة) في حالة واحدة فقط وهي :
عدد أعمدة المصفوفة الأولى = عدد صفوف المصفوفة الثانية
- ٢ - إذا كانت : m مصفوفة من النظم $m \times n$ ، n مصفوفة من النظم $n \times k$ ،
حيث : $n \neq 0$ فإن : $m \cdot n$ غير معرفة
- أي أن : عملية ضرب المصفوفتين في هذه الحالة غير ممكنة (غير معرفة)

حدد إذا كانت مصفوفة حاصل الضرب AB معرفة في الحالات التالية أم لا :

- (١) إذا كانت m مصفوفة من النظم 3×3 ، m مصفوفة من النظم 3×3
- (٢) إذا كانت m مصفوفة من النظم 3×3 ، m مصفوفة من النظم 3×3

- (۱) عدد أعمدة المصفوفة س = عدد صفوف المصفوفة ص
 ∴ مصفوفة حاصل الضرب س ص معرفة و تكون على النظم 4×4
 (۲) عدد أعمدة المصفوفة س \neq عدد صفوف المصفوفة ص
 ∴ مصفوفة حاصل الضرب س ص غير معرفة

- ٣ - و أي عنصر من عناصر E ينتج من حواصل ضرب عناصر الصف من المصفوفة الأولى " المعنى " se في عناصر العمود في المصفوفة الثانية " اليسرى " se خلا في نظيره

$$u \cdot p = \frac{1}{2} g^2 \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = u \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = p \quad \text{mit } g^2 = 1$$

$$\therefore P \text{ يـ من النظام } 2 \times 2 \quad \begin{bmatrix} \text{صالح} \times \text{صالح} & \text{صالح} \times \text{فساد} \\ \text{فساد} \times \text{صالح} & \text{فساد} \times \text{فساد} \end{bmatrix} = 2 \times 2 \text{ صالح} \times 2 \times 2 P$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 7 + 1 \times 5 & 7 \times 1 + 2 \times 7 + 5 \times 5 \\ 1 \times 5 + 2 \times 1 + 1 \times 1 & 7 \times 5 + 2 \times 1 + 5 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 24 \\ 3 & 19 \end{bmatrix}$$

٤ - الترتيب مهم عند إجراء عملية ضرب مصفوفتين لذا ضرب المصفوفات غير إبدائي

٥ - لا يمكن ضرب المصفوفة \times نفسها إلا إذا كانت مربعة

$$\text{حيث : } p \times p = p \quad . \quad p \times p = p$$

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{array} \right) = p \quad . \quad \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{array} \right) = p$$

أوجد : $p \times p$ ، $p \times p$ ، $p \times p$ ، $p \times p$ ، $p \times p$ (إن أمكن)

الحل

$p \times p$ ، $p \times p$ ، $p \times p$ غير معرف (لأن عدد أعمدة $p \neq$ عدد صفوف p)

$p \times p$ ، $p \times p$ ، $p \times p$ من النظم 2×2

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 8 \\ 5 & 15 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{array} \right) = p$$

$p \times p$ ، $p \times p$ من النظم 2×2

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 1 & 8 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{array} \right) = p$$

$$\left(\begin{array}{cc} 24 & 27 \\ 31 & 28 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 1 & 8 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 1 & 8 \end{array} \right) = p \times p = p$$

$p \times p$ ، $p \times p$ غير معرف لأن p مصفوفة غير مربعة

خواص عملية ضرب المصفوفات

من تعريف عمليتي جمع و ضرب المصفوفات مع افتراض تحقق الشروط اللازمة للتعريفين يمكن استنتاج الخواص التالية :

١ - خاصية الدمج \Rightarrow (إذا كانت : m ، n ، p ثلاث مصفوفات

فإن : $(m \times n) \times p = m \times (n \times p)$)

أي أن : ضرب المصفوفات عملية دمجية

٢ - خاصية المحايد الضربي \Rightarrow لأي مصفوفة $m \times n$ فإن : $m \times n = m \times I = I \times n$

حيث I مصفوفة الوحدة من نفس نظم $m \times n$

٣ - خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها $\Rightarrow m \times (n + p) = m \times n + m \times p$

$(m + n) \times p = m \times p + n \times p$

ملاحظة $\Rightarrow m \times n \neq n \times m$

٤ - الترتيب مهم عند إجراء عملية ضرب مصفوفتين لذا ضرب المصفوفات غير إبدائي

٥ - لا يمكن ضرب المصفوفة \times نفسها إلا إذا كانت مربعة

$$\text{حيث : } p \times p = p \quad . \quad p \times p = p$$

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{array} \right) = p \quad . \quad \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{array} \right) = p \quad \text{إذا كانت}$$

أوجد : $p \times p$ ، $p \times p$ ، $p \times p$ ، $p \times p$ ، $p \times p$ (إن أمكن)

الحل

$p \times p$ ، $p \times p$ ، $p \times p$ غير معرف (لأن عدد أعمدة $p \neq$ عدد صفوف p)

$p \times p$ ، $p \times p$ ، $p \times p$ من النظم 2×2

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 8 \\ 5 & 15 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{array} \right) = p$$

$p \times p$ ، $p \times p$ من النظم 2×2

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 1 & 8 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{array} \right) = p$$

$$\left(\begin{array}{cc} 24 & 27 \\ 31 & 28 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 1 & 8 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 1 & 8 \end{array} \right) = p \times p = p$$

$p \times p$ ، $p \times p$ غير معرف لأن p مصفوفة غير مربعة

خواص عملية ضرب المصفوفات

من تعريف عمليتي جمع و ضرب المصفوفات مع افتراض تحقق الشروط اللازمة للتعريفين يمكن استنتاج الخواص التالية :

١ - خاصية الدمج \Rightarrow (إذا كانت : m ، n ، p ثلاث مصفوفات

فإن : $(m \times n) \times p = m \times (n \times p)$)

أي أن : ضرب المصفوفات عملية دمجية

٢ - خاصية المحايد الضربي \Rightarrow لأي مصفوفة $m \times n$ فإن : $m \times 1 = 1 \times m = m$

حيث 1 مصفوفة الوحدة من نفس نظم $m \times n$

٣ - خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها $\Rightarrow m \times (n + p) = (m \times n) + (m \times p)$

، $(m + n) \times p = (m \times p) + (n \times p)$

ملاحظة $\Rightarrow m \times n \neq n \times m$

- (١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة فيما يلي :
- [١] إذا كانت : المصفوفة M على النظم $m \times n$ ، المصفوفة B على النظم $n \times n$ فإنه يمكن ضرب $M \times B$ عندما
 (١) $m = n$ (٢) $n = n$ (٣) $m = m$ (٤) $n = n$
- [٢] إذا كانت : المصفوفة M على النظم $m \times n$ ، المصفوفة B على النظم $n \times n$ فإنه يمكن ضرب $B \times M$ عندما
 (١) $m = m$ (٢) $n = n$ (٣) $m = m$ (٤) $n = n$
- [٣] إذا كانت : المصفوفة M على النظم $m \times n$ ، المصفوفة B على النظم $n \times n$ فإنه يمكن ضرب $M \times M$ عندما
 (١) $m = m$ (٢) $n = n$ (٣) $m = m$ (٤) $n = n$
- [٤] إذا كانت : المصفوفة M على النظم $m \times n$ ، المصفوفة B على النظم $n \times n$ فإنه يمكن إيجاد B^T عندما
 (١) $m = m$ (٢) $n = n$ (٣) $m = m$ (٤) $n = n$
- [٥] إذا كانت : المصفوفة M على النظم $m \times n$ ، المصفوفة B على النظم $n \times n$ وكان $E = M \times B$ فإن : E تكون على النظم
 (١) $m \times m$ (٢) $n \times n$ (٣) $m \times n$ (٤) $m \times m$
- [٦] إذا كانت : المصفوفة M على النظم 3×2 فإنه يمكن ضرب $M^T \times I$ إذا كانت I على النظم
 (١) 3×2 (٢) 2×2 (٣) 3×3 (٤) 3×1
- [٧] إذا كانت : المصفوفة M على النظم 3×2 فإن حاصل الضرب $M^T \times I$ يكون على النظم
 (١) 3×2 (٢) 2×2 (٣) 3×3 (٤) 1×3
- [٨] إذا كانت : المصفوفة M على النظم 3×2 ، المصفوفة B على النظم
 (١) 3×2 (٢) 2×3 (٣) 3×3 (٤) 1×3
- [٩] إذا كانت : المصفوفة M على النظم $m \times n$ ، المصفوفة B على النظم $m \times n$ فإن $M^T \times B$ مصفوفة على النظم
 (١) $m \times m$ (٢) $m \times n$ (٣) $m \times m$ (٤) $m \times m$
- [١٠] إذا كانت : $I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ فإن : $SI = 0$
 (١) ١ (٢) ٢ (٣) ٣ (٤) ٤
- [١١] إذا كانت : $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ فإن : $SI = 0$
 (١) ١٣ (٢) ١٢ (٣) ٨ (٤) ٥
- [١٢] إذا كانت : $I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ فإن : $SI = 0$
 (١) ٣ (٢) ٢ (٣) ١ (٤) ٤
- (٣) إذا كانت : $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ فلو جد قيمة : $M^T - B$

فلوجد قيمة : $M^T - B$

$$(3) \text{ إذا كانت : } \begin{bmatrix} 1 & - \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = P \text{ : أثبت أن : } I \cdot 2 + P \cdot 5 = {}^t P$$

$$(4) \text{ إذا كانت : } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = P \text{ : } \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = P$$

أوجد المصفوفة M بحيث : $M = {}^t M + M$ حيث : $M = P$

$$(5) \text{ إذا كانت : } \begin{bmatrix} 1 & - \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = P \text{ : أثبت أن : } I \cdot 4 + P \cdot 4 = {}^t P$$

$$(6) \text{ إذا كانت : } \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = P \text{ : } \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = P$$

أوجد المصفوفة M التي تحقق المعادلة : $M = {}^t M - P$ حيث : $M = P + {}^t P$

$$(7) \text{ إذا كانت : } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = P \text{ : } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = P$$

أوجد المصفوفة M التي تحقق المعادلة : $M = I - P$ حيث : $M = I - P$

حيث : I مصفوفة وحدة على النظم 2×2

$$(8) \text{ إذا كان : } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

أوجد قيم : M, N, E

$$(9) \text{ إذا كانت : } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = P \text{ : } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = P$$

أوجد المصفوفة M التي تحقق المعادلة : $M = {}^t M + P$ حيث : $M = P$

(10) أوجد قيم : M, N, E التي تحقق أن :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(11) \text{ إذا كان : } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = P \text{ : } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = P$$

أوجد قيم : M, N, E

(12) في إحدى المسابقات فاز فريق أنيس في ١٢ مباراة وتعادل في ٣ مباريات ، وفاز فريق الترسنة في ٩ مباريات وتعادل في ٤ مباريات وخسر مبارتين بينما فاز فريق الأهلى في ٩ مباريات وتعادل في ٥ مباريات وخسر ٤ مباريات فإذا كان الفريق الفائز يحصل ٣ نقاط و المتعادل يحصل على نقطة واحدة و الخاسر لا يحصل على أي نقطة أكتب هذه البيانات في صورة مصفوفتين M, N على النظم 3×3 ، $M = N$ ثم أوجد $M \cdot N$ ثم غير عن كل عنصر من عناصر المصفوفة $M \cdot N$

(13) محلان لبيع الملابس الرجالي كانت مبيعات المحل الأول في أحد الأسابيع ١٢ قميص ، ٨ بنطلون ، ٢ بدلة بينما كانت مبيعات المحل الثاني في نفس الأسبوع ١٥ قميص ، ٦ بنطلون ، بدلة واحدة فإذا كان ثمن البيع في المحلين ٥٠ جنيهًا للقميص ، ٨٠ جنيهًا للبنطلون ، ٥٠٠ جنيهًا للبدلة أكتب المبيعات على صورة مصفوفة على النظم 3×3

و أسعار المبيعات على صورة مصفوفة على النظم 3×3 ثم أوجد المصفوفة التي تبين جملة مبيعات كل محل

$$(14) \text{ إذا كانت : } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = P \text{ : أوجد : } {}^t P \cdot P \cdot {}^t P \text{ ثم استنتج } {}^t P$$

المحددات

تعريف \Rightarrow إذا كانت : M مصفوفة مربعة على النظم 2×2 حيث :

$$P = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{فإن : محدد المصفوفة } P \text{ ويرمز } |P| \text{ ويسمى بمحدد}$$

الرتبة الثانية و هو العدد المعرف كالتالي :

$$|P| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ملاحظة \Rightarrow

قيمة محدد الرتبة الثانية يساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيسي (a, d) مطروحاً منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر (b, c)

مثال ١

$$\text{أوجد قيمة المحدد : } \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل

$$1 = 15 - 16 = 3 \times 5 - 8 \times 2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$$

محدد الرتبة الثالثة \Rightarrow يسمى محدد المصفوفة على النظم 3×3 محدد الرتبة الثالثة

$$\text{و لايجاد قيمة محدد الرتبة الثالثة} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad \text{فإن :}$$

$$P = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} h + \begin{vmatrix} a & c \\ e & f \end{vmatrix} g$$

$$P = (a \cdot e \cdot i - b \cdot f \cdot g) - (a \cdot h \cdot i - c \cdot g \cdot d) + (b \cdot d \cdot f - e \cdot g \cdot a)$$

مثال ٢

$$\text{أوجد قيمة المحدد : } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} 3 - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} 1 + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} 2$$

$$= (1 \cdot 2 - 5 \cdot 3) \times 3 - (1 \cdot 1 - 5 \cdot 2) \times 1 + (1 \cdot 1 - 1 \cdot 3) \times 2 = 17$$

المحدد الأصغر المناظر لأي عنصر في مصفوفة

$$\begin{pmatrix} 31^p & 21^p & 11^p \\ 23^p & 22^p & 12^p \\ 33^p & 32^p & 13^p \end{pmatrix} = p : \text{ حيث } 3 \times 3 \text{ مصفوفة مربعة على النظم } 3 \times 3 \text{ حيث } p =$$

$$\begin{vmatrix} 23^p & 22^p \\ 33^p & 32^p \end{vmatrix} \text{ هو } |11^p| \text{ ويرمز له بالرمز } |11^p| \text{ فإن : المحدد الأصغر للعنصر } 11^p$$

$$\begin{pmatrix} 31^p & 21^p & 11^p \\ 23^p & 22^p & 12^p \\ 33^p & 32^p & 13^p \end{pmatrix} \text{ و نحصل عليه بحذف الصف و العمود المتقاطعين عند العنصر } 11^p \text{ كما يلي :}$$

$$\begin{vmatrix} 23^p & 12^p \\ 33^p & 13^p \end{vmatrix} \text{ هو } |11^p| \text{ ويرمز له بالرمز } |11^p| \text{ بالمثل : المحدد الأصغر للعنصر } 21^p \text{ ويرمز له بالرمز } |21^p|$$

و هكذا ، و جميع هذه المحددات هي محدثات من الرتبة الثانية

ملاحظة

$$\begin{pmatrix} 31^p & 21^p & 11^p \\ 23^p & 22^p & 12^p \\ 33^p & 32^p & 13^p \end{pmatrix} = p : \text{ إذا كانت } p \text{ مصفوفة مربعة على النظم } 3 \times 3 \text{ حيث } p =$$

محدد p يرمز له بالرمز $|p|$

$$\begin{vmatrix} 22^p & 12^p \\ 32^p & 13^p \end{vmatrix} 31^p + \begin{vmatrix} 23^p & 12^p \\ 33^p & 13^p \end{vmatrix} 21^p - \begin{vmatrix} 23^p & 22^p \\ 33^p & 32^p \end{vmatrix} 11^p = |p| \text{ فإن : } |p| =$$

$$|31^p| 31^p + |21^p| 21^p - |11^p| 11^p =$$

* في الملاحظة السابقة ضرب كل عنصر في المحدد الأصغر المناظر له مسبقا بالإشارات $(+, -, +)$ على الترتيب

و إشارة المحدد الأصغر المناظر للعنصر p صرغ تتعين بالقاعدة :

$$\text{إشارة } |p| \text{ صرغ هي نفس إشارة } (1 - (-1)^{p+q})$$

$$\text{إشارة } |21^p| \text{ هي نفس إشارة } (1 - (-1)^{2+1}) \text{ و هي سالبة}$$

$$\text{إشارة } |31^p| \text{ هي نفس إشارة } (1 - (-1)^{3+1}) \text{ و هي موجبة}$$



أي لتحديد إشارة أي محدث مناظر لعنصر ما نجمع رتبتي الصف و العمود اللذين يتقاطعان عند هذا العنصر :

* فإذا كان مجموع الرتبتين زوجيا كانت الإشارة موجبة

* فإذا كان مجموع الرتبتين فرديا كانت الإشارة سالبة

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \text{ ملاحظة : و تكون قاعدة الإشارات للمحدد الأصغر كما يلي :}$$

* يمكن إيجاد قيمة المحدد (فك المحدد) باستخدام عناصر أي صف (أو عمود) و محدثاتها الصغرى و بإشاراتها المناسبة و للتسهيل تستخدم عناصر الصف أو العمود الذي يحتوي على أكبر عدد من الأصفار بعد أخذ الإشارة المناسبة

محدد المصفوفة المثلثية

المصفوفة المثلثية هي مصفوفة جميع عناصرها التي تقع تحت (أو فوق) القطر الرئيسي أصغر من ٠ :

$$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٧ \\ ٠ & ٩ & ٤ \\ ٥ & ١ & ٥- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٧ \\ ٦ & ٩ & ٠ \\ ٥ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ٣ & ٩ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$$

و يلاحظ أن : قيمة محدد المصفوفة المثلثية يساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي

$$٣٣٨٢٢٨١١٨ = \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١٩٨ \\ ٠ & ٢٢٨ & ١٢٨ \\ ٣٣٨ & ٣٢٨ & ١٣٨ \end{vmatrix} \text{ أى أن :}$$

و نبرهان ذلك نذكره باستخدام عناصر الصف الأول

$$٣٣٨٢٢٨١١٨ = (٠ \times ٣٣٨ - ٣٣٨ \times ٢٢٨) ١١٨ = \begin{vmatrix} ٠ & ٢٢٨ \\ ٣٣٨ & ١٣٨ \end{vmatrix} ١١٨ = \text{المحدد}$$

$$٣٦ = ٩ \times ٢ \times ٢ = \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ٩ & ١ & ٣ \end{vmatrix}$$

مثال ٢

لإيجاد مساحة سطح المثلث باستخدام المحددات

يمكن استخدام المحددات لإيجاد مساحة سطح المثلث بمعلومية إحداثيات رؤوسه كالتالى :
مساحة سطح المثلث الذى رؤوسه : س (س ، ب) ، ص (ص ، د) ، ع (ع ، هـ) و :
هى أ هـ حيث :

$$| \text{أ هـ} | = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} ١ & س & ب \\ ١ & ص & د \\ ١ & ع & هـ \end{vmatrix}$$

أ هـ : تعنى قيمة هـ الموجبة

أوجد مستخدماً المحددات مساحة سطح المثلث الذى إحداثيات رؤوسه

$$(٥, ٣-), (٤, ٢), (٣-١-)$$

الحل

$$| \text{أ هـ} | = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} ١ & ٣- & ١- \\ ١ & ٤ & ٢ \\ ١ & ٥ & ٣- \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٥ & ٣- \end{vmatrix} ١ + \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣- \end{vmatrix} (٣-) - \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix} ١- \right]$$

$$= \frac{1}{2} [(١٢+١٠) ١ + (٣+٢) ٣ + (٥-٤) ١]$$

$$= \frac{1}{2} (٢٢+١٥+١) = ١٩ \text{ وحدة مربعة}$$

مثال ٣

إستخدام المحددات لإثبات أن ثلاث نقط تقع على إستقامة واحدة

يمكن إستخدام المحددات لإثبات أن النقط س (p ، ب) ، ص (د ، ع) ، ع (هـ ، و) كالتالى :

$$\begin{vmatrix} 1 & ب & پ \\ 1 & ع & د \\ 1 & و & هـ \end{vmatrix} = \Delta$$

نوجد Δ حيث : Δ تعنى قيمة المحدد

فإذا كانت : $\Delta = 0$ صفر فإن : النقط تقع على إستقامة واحدة

حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر

إذا كان لدينا نظام من المعادلات الخطية فى مجهولين كما يلى :

$$پس + ب ص = م ، د ص + ع س = ن$$

معاملات المجهولين بعد ترتيب النظام تسمى بمصفوفة المعاملات

$$\begin{bmatrix} ب & پ \\ ع & د \end{bmatrix}$$

و يمكن إستخدام المحددات لحل أنظمة المعادلات الخطية ، فإذا كانت قيمة محدد مصفوفة المعاملات

$$\Delta = \begin{vmatrix} ب & پ \\ ع & د \end{vmatrix} \neq 0$$

و يرمز له بالرمز Δ " و يقرأ دلتا " لا تساوى صفراً فإن للنظام حلاً وحيداً

ملاحظة

، أما إذا كانت قيمة المحدد تساوى صفراً فإما أن يكون للنظام عدد لا نهائى من

من الحلول أو ليس له حل

تلاحظ فى المحدد Δ أن معاملى المجهول س تكون العمود الأول ، و معاملى المجهول

ص تكون العمود الثانى

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} م & پ \\ ن & د \end{vmatrix}$$

و يسمى محدد المجهول س و يرمز له بالرمز Δ_s س " و يقرأ دلتا س "

، و نحصل عليه من المحدد Δ بعد تغيير عناصر العمود الأول (معاملات س) بالشوايت

$$ن ، م$$

$$\Delta_v = \begin{vmatrix} م & ب \\ ن & ع \end{vmatrix}$$

و يسمى محدد المجهول ص و يرمز له بالرمز Δ_v ص " و يقرأ دلتا ص "

، و نحصل عليه من المحدد Δ بعد تغيير عناصر العمود الأول (معاملات ص) بالشوايت

$$پ ، د$$

فإذا فرضنا أن $\Delta \neq 0$ ، فإن حل النظام هو :

$$س = \frac{\Delta_s}{\Delta} ، ص = \frac{\Delta_v}{\Delta}$$

و يمكن التحقق من الحل بالتعويض عن قيم س ، ص فى كلا المعادلتين

حل نظام المعادلتين الآتيتين بطريقة كرامر

$$س + ص = ٥ ، ٢س - ص = ١$$

الحل

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} = (١ \times -١) - (١ \times ٢) = -١ - ٢ = -٣ \neq ٠$$

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ١ & -١ \end{vmatrix} = (٥ \times -١) - (١ \times ١) = -٥ - ١ = -٦$$

$$\Delta_v = \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} = (٥ \times -١) - (١ \times ٢) = -٥ - ٢ = -٧$$

$$س = \frac{\Delta_s}{\Delta} = \frac{-٦}{-٣} = ٢ ، ص = \frac{\Delta_v}{\Delta} = \frac{-٧}{-٣} = \frac{٧}{٣}$$

مجموعة الحل = { (٢ ، ٧/٣) }

حل أنظمة من المعادلات الخطية في ثلاثة مجاهيل

إذا كان لدينا نظام من المعادلات الخطية في ثلاثة مجاهيل كالآتي :

$$١س + ٢ص + ٣ع = ٢ ، ٢س + ٣ص + ٤ع = ٥ ، ٣س + ٤ص + ٥ع = ٧$$

فإنه بطريقة معادلة لما فضاء في حالة نظام معادلتين في مجهولين يكون :

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{vmatrix} = \text{محدد المعاملات}$$

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٤ & ٥ \\ ٤ & ٥ & ٦ \end{vmatrix} = \text{محدد المجهول س و نحصل عليه بتغيير عناصر العمود الأول (معاملات س) بالثوابت ٢ ، ٥ ، ٧}$$

$$\Delta_v = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{vmatrix} = \text{محدد المجهول ص و نحصل عليه بتغيير عناصر العمود الأول (معاملات ص) بالثوابت ٢ ، ٥ ، ٧}$$

$$\Delta_e = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{vmatrix} = \text{محدد المجهول ع و نحصل عليه بتغيير عناصر العمود الأول (معاملات ع) بالثوابت ٢ ، ٥ ، ٧}$$

فإذا فرضنا أن $\Delta \neq ٠$ فإن حل النظام هو :

$$س = \frac{\Delta_s}{\Delta} ، ص = \frac{\Delta_v}{\Delta} ، ع = \frac{\Delta_e}{\Delta}$$

و يمكن التحقق من الحل بالتعويض عن قيم س ، ص ، ع في كلا المعادلتين

تأريخ (٤)

(١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة فيما يلي :

$$..... = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \quad [١]$$

- (١) - ١ (٢) - ١ (٣) - ١٣ (٤) - ٤

$$..... = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad [٢]$$

- (١) - ١١١ (٢) - ٩٠ (٣) - ٣٠ (٤) - صفر

$$..... = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad [٣]$$

- (١) - ٩ (٢) - صفر (٣) - ٩ (٤) - ٩

$$..... = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad [٤]$$

- (١) - ٤ (٢) - صفر (٣) - ٤ (٤) - ١٠

(٢) أوجد قيمة المحددات التالية :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1-1-2 \end{vmatrix} [٣] \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1-7 \end{vmatrix} [٢] \quad \begin{vmatrix} 1-2 \\ 5 & 6-1 \end{vmatrix} [١]$$

$$\begin{vmatrix} 1-1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2-0 \end{vmatrix} [٦] \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1-3 \end{vmatrix} [٥] \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1-2 & 3 \end{vmatrix} [٤]$$

(٣) باستخدام طريقة كرامر حل المعادلات :

$$[١] \quad \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + 4z = 2 \end{cases}$$

$$[٢] \quad \begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$[٣] \quad \begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$[٤] \quad \begin{cases} x - y - z = 2 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$[٥] \quad \begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$$

$$[٦] \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

(٤) أوجد مستخدماً المحددات مساحة سطح المثلث الذي رؤوسه :

$$[١] \quad (1, 2), (1, 4), (2, 3)$$

$$[٢] \quad (5, 4), (1, 3), (2, 2)$$

$$[٣] \quad (15, 15), (7, 1), (5, 5)$$

(٥) باستخدام المحددات أثبت أن النقاط التالية تقع على استقامة واحدة :

$$[١] \quad (1, 2), (3, 4), (5, 5)$$

$$[٢] \quad (11, 6), (8, 4), (2, 0)$$

$$[٣] \quad (19, 1), (2, 3), (7, 2)$$

المعكوس الضربي للمصفوفة

المعكوس الضربي للمصفوفة على النظم 2×2 :-

* إذا كانت : P ، ب مصفوفتان مربعتان كل منهما على النظم 2×2
وكان : $P \cdot B = B \cdot P = I$ فإن : المصفوفة ب تسمى معكوساً ضربياً للمصفوفة P
و كذلك تسمى المصفوفة P معكوساً ضربياً للمصفوفة ب

* إذا كان : للمصفوفة P معكوساً ضربياً فإننا نرمز لها بالرمز P^{-1}
حيث : $P \cdot P^{-1} = P^{-1} \cdot P = I$

* يكون للمصفوفة P معكوس ضربي إذا كان محدد $P \neq 0$
= المصفوفة P لا يكون لها معكوساً ضربياً إذا كان محدد $P = 0$

خطوات إيجاد المعكوس الضربي للمصفوفة على النظم 2×2 إن وجد :-

* إذا كانت : P مصفوفة مربعة على النظم 2×2 حيث : $\begin{bmatrix} P & I \\ I & P \end{bmatrix}$

(١) نوجد محدد $\Delta = P$ حيث : $\Delta \neq 0$

(٢) نبدل بين وضعي العنصرين الواقعين على القطر الرئيسي للمصفوفة

(٣) نغير فلا من إشارتي العنصرين الواقعين على القطر الآخر للمصفوفة

(٤) نضرب المصفوفة الناتجة من (٢) ، (٣) في العدد $\frac{1}{\Delta}$

* فنحصل على P^{-1} حيث : $\begin{bmatrix} P^{-1} & I \\ I & P^{-1} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta} = P^{-1}$

أوجد قيم P التي تجعل لكل من المصفوفات التالية معكوساً ضربياً :

$$\begin{bmatrix} 4 & P \\ P & 9 \end{bmatrix} \quad (١)$$

الحل

(١) المصفوفة ليس لها معكوساً ضربياً عندما يكون محدد المصفوفة = ٠

$$\text{أي عندما } 0 = \begin{vmatrix} 4 & P \\ P & 9 \end{vmatrix} \text{ أي عندما : } P^2 - 36 = 0 \text{ أي عندما : } P = \pm 6$$

عندما $P \in \{ -6, 6 \}$ يكون للمصفوفة المعطاء معكوساً ضربياً

حل معادلتين باستخدام معكوس المصفوفة

إذا كان لدينا نظام من معادلتين خطيتين كالآتي :-

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad , \quad a_2x + b_2y = c_2$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \quad : \text{ فإنه يمكن كتابتهما على الصورة التالية :}$$

$$\text{فإذا فرضنا أن : } \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = A, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X, \quad \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} = B, \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = C$$

فإن : المعادلتين يمكن كتابتهما على صورة معادلة مصفوفية واحد كما يلي : $AX = C$

حيث : A هي مصفوفة المعاملات ، X هي مصفوفة المجاهيل ، C هي مصفوفة الثوابت

وإذا كان : محدد $A \neq 0$ أي : $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

فيكون من الممكن إيجاد حل للمعادلة $AX = C$ كما يلي :-

$$A^{-1}AX = A^{-1}C \quad \text{" بضرب طرفي المعادلة من اليمين في } A^{-1} \text{"}$$

$$X = A^{-1}C \quad \text{" خاصية التجميع "}$$

$$X = A^{-1}C \quad \text{" المعكوس الضربي للمصفوفة } A \text{"}$$

$$X = A^{-1}C$$

و بهذا يتضح أنه يمكننا إيجاد المجاهيل x, y بدلالة الثوابت

$$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$$

حل نظام المعادلتين التاليتين باستخدام المصفوفات

$$x + y = 5, \quad x - y = 1$$

الحل

نكتب المعادلة المصفوفية $AX = C$ حيث :

$$x + y = 5, \quad x - y = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{محدد } A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

∴ يكون للمصفوفة A معكوساً ضربياً ، ويكون الحل هو : $X = A^{-1}C$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1}C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{∴ مجموعة الحل} = \{(2, 3)\}$$

التشفير باستخدام المصفوفات

نشاط

التشفير باستخدام المصفوفات :

يمكن استخدام أي مصفوفة و معكوسها الضربي

لتشفير رسالة و يتضح ذلك من المثال التالي :

مثال ٣

باستخدام الجدول المقابل :

$$\text{والمصفوفة } M = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

شفر الرسالة " ذاكر تتجج "
 ثم فك هذه الشفرة

الحل

لتشفير الرسالة : نكتب الرسالة " ذاكر تتجج " كمصفوفات على النظم 1×2 باستخدام الرقم المناظر لكل حرف بالجدول كما يلي :

$$(1) \quad \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ مر } \begin{bmatrix} 22 \\ 10 \end{bmatrix} \text{ تن } \begin{bmatrix} 3 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ جج } \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

نضرب مصفوفة التشفير M في مصفوفات الرسالة (١) فينتج :

$$\begin{bmatrix} 118 \\ 54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 39 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 38 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 87 \\ 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

فتصبح الرسالة على الصورة :

$$(2) \quad \begin{bmatrix} 38 \\ 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 87 \\ 31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 118 \\ 54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 39 \\ 19 \end{bmatrix}$$

لك الشفرة : نوجد المعكوس الضربي لمصفوفة التشفير : $\because M^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \neq 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} = M^{-1}$$

نضرب M^{-1} في مصفوفات الرسالة (٢) فينتج :

$$\begin{bmatrix} 22 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 118 \\ 54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 \\ 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 87 \\ 31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

فتصبح الرسالة على الصورة : $\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ ومن الجدول تصبح : " ذاكر تتجج "

(١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة فيما يلي :

[١] يكون المصفوفة معكوساً ضربياً إذا كان محددها = ٠٠٠٠ .

(١) ٠ (٢) ١ (٣) -١ (٤) ٢

[٢] لا يكون للمصفوفة معكوساً ضربياً إذا كان محددها $\neq ٠٠٠٠$.

(١) ١ (٢) ١ (٣) -١ (٤) ٢

[٣] المصفوفة ٠٠٠٠ لها معكوس ضربى

(١) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ (٢) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ (٣) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ (٤) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

[٤] المصفوفة ٠٠٠٠ ليس لها معكوس ضربى

(١) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ (٢) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ (٣) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ (٤) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

(٥) بين ما إذا كان لكل مصفوفة في ما يلي معكوس ضربى أم لا و في حالة ما إذا كان لها معكوس ضربى أوجد

(١) $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ (٢) $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ (٣) $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ (٤) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

(٣) أوجد قيم p التي تجعل لكل من المصفوفات التالية معكوساً ضربياً :

(١) $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ p & ٢ \end{bmatrix}$ (٢) $\begin{bmatrix} p & ٣ \\ ٢٧ & p \end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} p & ٢ \\ ١ & ٢-p \end{bmatrix}$ (٤) $\begin{bmatrix} ١-p & ٠ \\ ٢ & ٢-p \end{bmatrix}$

(٤) حل كل نظام من المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات:

[١] $٢ = ٣ + ٤$ $٥ = ٣ + ٤$ $٦ = ٣ + ٤$

[٢] $٠ = ٣ - ٤$ $٠ = ٣ - ٤$ $٠ = ٣ - ٤$

[٣] $٢ = ٣ + ٤$ $٠ = ٣ - ٤$ $٠ = ٣ - ٤$

(٥) عددان مجموعهما ١٠ والفرق بينهما ٤ أوجد العددين باستخدام المصفوفات

(٦) نصف الفرق بين عددين هو ٢ ، مجموع العدد الأكبر و ضعف العدد الأصغر هو ١٣ أوجد العددين باستخدام المصفوفات

(٧) إذا كان ثمن ٤ كجم من الموز ، ٥ كجم من التفاح ، ١٢٠ جنيهًا ، كان ثمن ١٠ كجم من الموز ، ٥ كجم من التفاح ، ١٥٠ جنيهًا استخدام المصفوفات في إيجاد ثمن الكيلوجرام الواحد من كل من الموز و التفاح

(٨) إذا كان الخط المستقيم $٣ + ٤ = ٥$ يمر بالنقطتين (١ ، ١) ، (٣ ، ٣) استخدام المصفوفات في إيجاد قيمة الثابتين p ، q

(٩) إذا كان المنحنى $٣ = ٤ + ٥$ يمر بالنقطتين (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) استخدام المصفوفات في إيجاد قيمة الثابتين p ، q

حل متباينات الدرجة الأولى في متغير واحد

خواص علاقة التباين في \mathbb{R} : إذا كان s, v, c فإن :

- ## إذا كان : $s \leq v$ فإن : $s + c \leq v + c$ لكل $c < 0$
 $s \leq v$ \Leftrightarrow $s + c \leq v + c$ لكل $c < 0$
 $s \geq v$ \Leftrightarrow $s + c \geq v + c$ لكل $c < 0$
- ## إذا كان : $s \geq v$ فإن : $s + c \geq v + c$ لكل $c < 0$
 $s \geq v$ \Leftrightarrow $s + c \geq v + c$ لكل $c < 0$
 $s \leq v$ \Leftrightarrow $s + c \leq v + c$ لكل $c < 0$

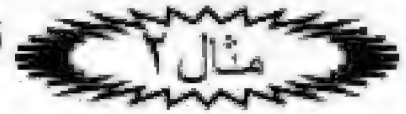
أوجد في \mathbb{R} مجموعة حل المتباينة الآتية ومثلها على خط الأعداد
 $3 - x > 4$



الحل

إضافة (-1) للطرفين : $3 - x > 4 \Rightarrow -x > 1$
 يضرب الطرفين على ($-\frac{1}{1}$) : $x < -1$
 \therefore مجموعة الحل = $]-\infty, -1[$

أوجد في \mathbb{R} مجموعة حل المتباينة الآتية ومثلها على خط الأعداد
 $2 - x \geq 2$



الحل

إضافة (x) لحدود المتباينة : $2 - x \geq 2 \Rightarrow 0 \geq x$
 بقسمة حدود المتباينة على ($-\frac{1}{1}$) : $0 \leq x$
 \therefore مجموعة الحل = $[0, +\infty[$

أوجد في \mathbb{R} مجموعة حل المتباينة الآتية ومثلها على خط الأعداد
 $1 + x \geq 2 + x \geq 5 + x$



الحل

إضافة ($-x$) إلى حدود المتباينة : $1 + x \geq 2 + x \geq 5 + x \Rightarrow 1 \geq 2 \geq 5$
 بقسمة حدود المتباينة على ($-\frac{1}{1}$) : $1 \geq 2 \geq 5$
 \therefore مجموعة الحل = $]-\infty, -2[$

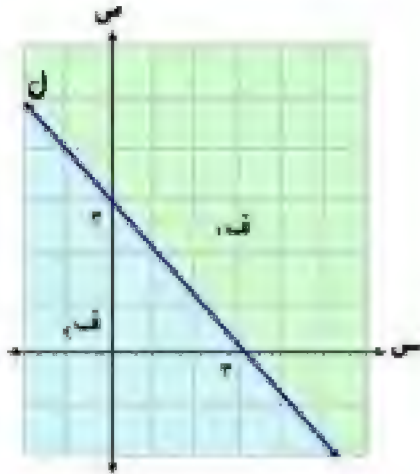
حل متباينات الدرجة الأولى في مجهولين

مثال ١

مثل بيانياً المعادلة : $س + ص = ٣$

الحل

س	٠	٣	١
ص	٣	٠	٢



يكفي نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين

وذلك بوضع " $س = ٠$ " ثم إيجاد قيمة "ص"

" بوضع " $ص = ٠$ " ثم إيجاد قيمة "س"

والثالثة للتأكد

المستقيم $ل$ هو التمثيل البياني للمعادلة : $س + ص = ٣$

ملاحظات ➡️ المستقيم $ل$ يقسم المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقط

(١) مجموعة نقط المستقيم $ل$ وهي مجموعة النقاط التي تحقق معادلته ويسمى المستقيم الحدي

(٢) $ف١$ وهي مجموعة نقط المستوى والتي تقع على أحد جانبي المستقيم $ل$ وهي نصف المستوى

(٣) $ف٢$ وهي مجموعة نقط المستوى والتي تقع على الجانب الآخر للمستقيم $ل$ وهي النصف الآخر للمستوى

حل متباينات الدرجة الأولى في مجهولين بيانياً ➡️

المتباينة من الدرجة الأولى في مجهولين تشبه المعادلة الخطية الأولى في مجهولين

و الفرق بينهما هو رمز المتباينة بدلا من وضع رمز التساوي

فمثلاً:

$س + ص \geq ٣$ هي متباينة خطية

$س + ص = ٣$ هي معادلة خطية

خطوات تمثيل متباينة الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً ➡️

(١) نرسم المستقيم الحدي الذي يمثل المعادلة المناظرة للمتباينة

* إذا كانت علامة التباين $>$ ، $<$ | يكون المستقيم الحدي منقطع

* إذا كانت علامة التباين \geq ، \leq | يكون المستقيم الحدي متصل

(٢) نختار إحدى النقط في أحد جانبي المستقيم الحدي " للسهولة نختار النقطة (٠، ٠) "

و نعوض بها في الطرف الأيمن

* إذا حلت هذه النقطة المتباينة نظل هذا الجانب و يكون هو مجموعة الحل

* إذا لم تحقق هذه النقطة المتباينة نظل الجانب الآخر و يكون هو مجموعة الحل

مثال ٢

مثل بيانياً مجموعة المتباينة :
 $s + m \geq 3$

الحل

نمثل بيانياً المستقيم الحدي : $s + m = 3$

كما في المثال السابق " بخط متصل "

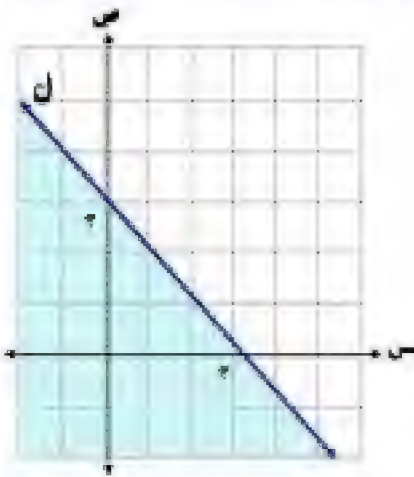
نعوض بالنقطة (٠ ، ٠) في الطرف الأيمن

نجد : $3 \geq ٠$ صواب

∴ (٠ ، ٠) يحقق المتباينة

، مجموعة الحل هي نصف المستوى الذي تنتمي إليه نقطة الأصل لا لـ

و يمثلها المنطقة المظللة بالشكل المقابل



مثال ٣

إذا أراد محمد شراء نوعين من الكتب سعر النوع الأول جنيهاً و سعر النوع الثاني

٤ جنيهاً بحيث لا يدفع أكثر ١٢ جنيهاً فكم عدد الكتب التي يمكنه شراؤها من كل نوع

الحل

نفرض أن عدد كتب النوع الأول = s ، عدد الكتب من النوع الثاني = m

∴ ثمن شراء النوع الأول + ثمن شراء النوع الثاني \geq الحد الأقصى للشراء

أي أن : $٢s + ٤m \geq ١٢$

نرسم المستقيم الحدي : $٢s + ٤m = ١٢$

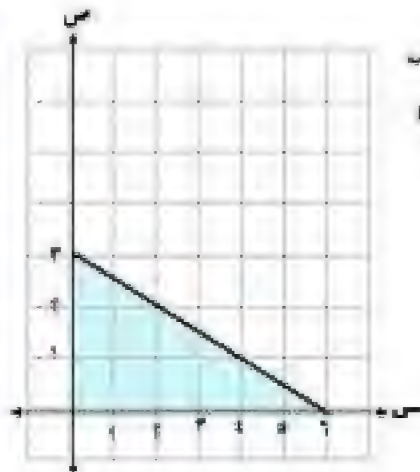
يمثل بخط متصل

نعوض بالنقطة (٠ ، ٠) في الطرف الأيمن

نجد : $١٢ \geq ٠$ صواب

∴ (٠ ، ٠) يحقق المتباينة

يوضح التمثيل البياني المقابل كل الحلول الممكنة



لاحظ

* نستخدم الربع الأول فقط لأنه لا يمكن شراء كمية سالبة من الكتب

* يمكن شراء كتابين من كل نوع أو ٤ كتب من النوع الأول ، و كتاب واحد من النوع الثاني أو... .

بحيث يدفع محمد ١٢ جنيهاً

* يمكن شراء كتابين من النوع الأول و كتاب واحد من النوع الثاني أو... .

بحيث يدفع محمد أقل من ١٢ جنيهاً

(١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة فيما يلي :

[١] إذا كان : $s \in M$ فإن : مجموعة حل المتباينة $3s + 1 < 7$ هي
 (١) $]-\infty, 2[$ (٢) $]-\infty, 2]$ (٣) $]-\infty, 2[$ (٤) $]-\infty, 2]$

[٢] إذا كان : $s \in M$ فإن : مجموعة حل المتباينة
 $s > 4$ و $s > 9$ هي
 (١) $]-\infty, 3[$ (٢) $]-\infty, 3]$ (٣) $]-\infty, 3[$ (٤) $]-\infty, 3]$

[٣] النقطة تقع في منطقة حل المتباينة : $2s + 3 \leq 7$
 (١) $(-0.5, 3)$ (٢) $(-0.5, 3]$ (٣) $(-0.5, 3)$ (٤) $(-0.5, 3]$

[٤] النقطة لا تقع في منطقة حل المتباينة : $2s + 3 \leq 7$
 (١) $(-0.5, 3)$ (٢) $(-0.5, 3]$ (٣) $(-0.5, 3)$ (٤) $(-0.5, 3]$

[٥] إذا كان : n هو المستقيم الحدي للمتباينة : $s + 4 > 4$
 فإن : n مجموعة حل المتباينة
 (١) \ni (٢) $\not\ni$ (٣) \supset (٤) $\not\supset$

[٦] نقط المستقيم الحدي للمتباينة : $(2s + 3 \leq 7)$ مجموعة الحل
 (١) \ni (٢) $\not\ni$ (٣) \supset (٤) $\not\supset$

(٢) أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية :

$$[١] 1 - s > 1 + s \geq 5$$

$$[٢] s - 1 < 3 - s \leq 5$$

$$[٣] 2s + 3 \geq 3 + s \geq 4 + s \geq 7$$

(٣) مثل ببشيا مجموعة حل كلا من المتباينات الآتية حيث : $s, 1, s \in M$

$$[١] s < 1$$

$$[٢] s + 2 \geq 4$$

$$[٣] 2 + s + 5 < 15$$

$$[٤] s > 1 - s$$

$$[٥] s - s > 4 - s$$

$$[٦] 4 + s + 3 > 12$$

$$[٧] s > 2 + s$$

$$[٨] 2 - s \geq 5 > 10$$

(٤) إذا أراد حسن شراء حصص و قول سوداني لزوم رحلة له و لعائلته بحيث لا يدفع أكثر
 ٤٨ جنيهًا ، وكان سعر الحصص ٨ جنيهات و سعر القول السوداني ١٦ جنيهًا فكم
 كيلوجراما يمكن لحسن شراؤه من كل نوع

(٥) مصنع صغير لإنتاج الملابس الجاهزة لديه ٦٠ متراً القماش و ينتج نوعين من الثياب
 فإذا كان النوع يحتاج ٣ متر ، و النوع الثاني يحتاج ٤.٥ متر فكم عدد الأتواب التي يمكن
 للمصنع أن ينتجها من كل نوع

حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانياً

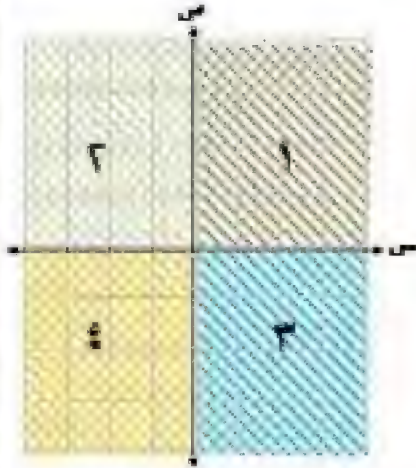
نظام المتباينات الخطية \Rightarrow تكون متباينتان خطيتان أو أكثر معاً نظاماً من المتباينات الخطية ويكون الزوج المرتب (s, v) حلاً لهذا النظام إذا حقق جميع متبايناته

ملاحظة \Rightarrow يمكن وصف كل ربع من أرباع مستوى إحداثي بمعاد

باستخدام نظام من المتباينات الخطية

فمن الشكل المقابل :

- الربع الأول : $s < 0, v < 0$
- الربع الثاني : $s < 0, v > 0$
- الربع الثالث : $s > 0, v > 0$
- الربع الأول : $s > 0, v < 0$



حل نظام من المتباينات الخطية بيانياً \Rightarrow

حل نظام من المتباينات الخطية يعنى إيجاد جميع الأزواج المرتبة التي تحقق متباينات هذا النظام وتحديد جميع النقاط (الأزواج المرتبة) التي تشكل حلاً للنظام يتم تقليل منطقة حل متباينة من هذه المتباينات في مستوى إحداثي واحد فتكون المنطقة المشتركة بين مناطق حل جميع المتباينات هي منطقة حل هذا النظام

حل نظام المتباينات الخطية التالي بيانياً : $s + v \leq 4, v \leq 1$

مثال ١

الحل

للمتباينة الأولى : $s + v \leq 4$

نرسم المستقيم الحدى $ل١ : s + v = 4$ بخط متصل

و يمر بالنقطتين $(0, 4)$ ، $(4, 0)$ ، النقطة $(0, 0)$ لا تحقق المتباينة

\therefore مجموعة حل المتباينة $s + v \leq 4$ هي $ف١$

نصف المستوى الذى لا تنتمى إليه النقطة $(0, 0)$

للمتباينة الثانية : $v \leq 1$

نرسم المستقيم الحدى $ل٢ : v = 1$ بخط متقطع

و يمر بالنقطة $(1, 0)$ ، النقطة $(0, 0)$ تحقق المتباينة

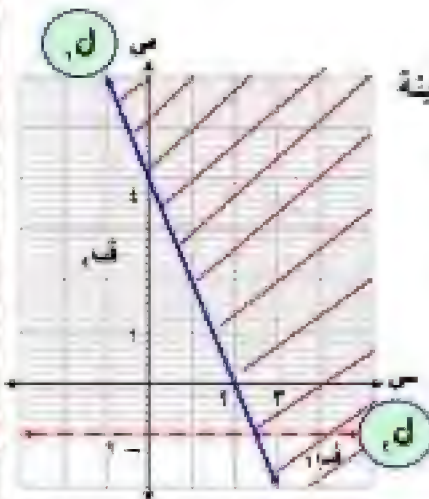
\therefore مجموعة حل المتباينة $v \leq 1$ هي $ف٢$

نصف المستوى الذى تنتمى إليه النقطة $(0, 0)$

و تكون مجموعة حل المتباينتين هي : $ف = ف١ \cap ف٢$

كما بالشكل المقابل مع ملاحظة أن نقط المستقيم $ل١ \supset ف$

، نقط المستقيم $ل٢ \not\subset ف$



التحقق :

لاحظ أن النقطة (١ ، ٣) تنتمي إلى منطقة حل النظام
لذا يمكن إستخدامها نقطة إختبار ، و التحقق من صحة الحل بالتعويض عن
(س ، ص) بالنقطة (١ ، ٣) في كلتا المتباينتين

$٣ - ١ < ٤$	صواب	$٤ \leq ٣ + ١$	صواب
$٣ - ١ < ١ + ٣ \times ٣$	صواب	$٤ \leq ١ + ٣ \times ٣$	صواب
$٣ - ١ < ١$	صواب	$٤ \leq ٧$	صواب

حل نظام المتباينات الخطية التالي بيانياً

مثال ٢

$$\begin{cases} ٣ - س \geq ٠ \\ ١ - س \leq ١٢ \end{cases}$$

الحل

للمتباينة الأولى : $٣ - س \geq ٠$

نرسم المستقيم الحدي : $٣ - س = ٠$ بخط متصل

و يمر بالنقطتين (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٣) ، النقطة (٠ ، ٠) تقع على $٣ - س$

لذا نختار نقطة أخرى و تكون (١ ، ١) للإختبار

$$١ \times ٣ - ١ \times ٠ \geq ٠$$

$$٣ - ١ \geq ٠ \text{ صواب}$$

مجموعة الحل هي $٣ - س \geq ٠$

نصف المستوى الذي تنتمي إليه النقطة (١ ، ١) $٣ - س \geq ٠$

للمتباينة الثانية : $١ - س \leq ١٢$

نرسم المستقيم الحدي : $١ - س = ١٢$

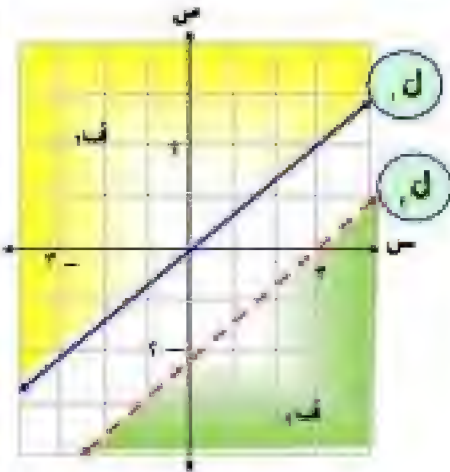
يقطع متقطع و يمر بالنقطتين (٠ ، ٣) ، (١٣ ، ٠)

، النقطة (٠ ، ٠) لا تحقق المتباينة

مجموعة الحل هي $١ - س \leq ١٢$ نصف المستوى الذي تنتمي إليه النقطة (٠ ، ٠)

و تكون مجموعة حل المتباينتين هي : $٣ - س \geq ٠ \cap ١ - س \leq ١٢ = \emptyset$

و لاحظ أن $٣ - س \geq ٠ \parallel ١ - س \leq ١٢$ و لا توجد منطقة مشتركة بين المتطقتين المثلثتين



المتجهات

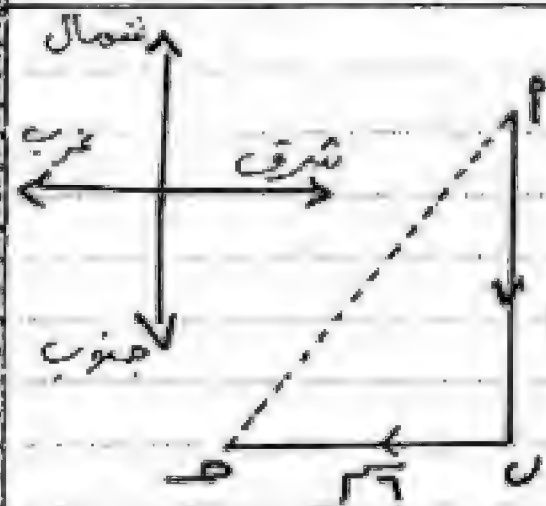
الكبيك

الكمية القياسية \rightarrow تتحدد تماماً بمعرفة مقدارها فقط
[الطول - المساحة - الكتلة - ...]

الكمية المتجهة \rightarrow تتحدد تماماً بمعرفة مقدارها واتجاهها
[السرعة - القوة - الازاحة - ...]

الازاحة

هي كمية متجهة وهي المسافة المقطوعة في اتجاه معين



مثلاً في الشكل المقابل

إذا تحرك جسم من النقطة (P) مسافة 8 متراً جنوباً
ثم غير اتجاهه 6 م غرباً ثم توقف عند (Q)
فأدرك المسافة التي قطعها الجسم $= 6 + 8 = 14$ م

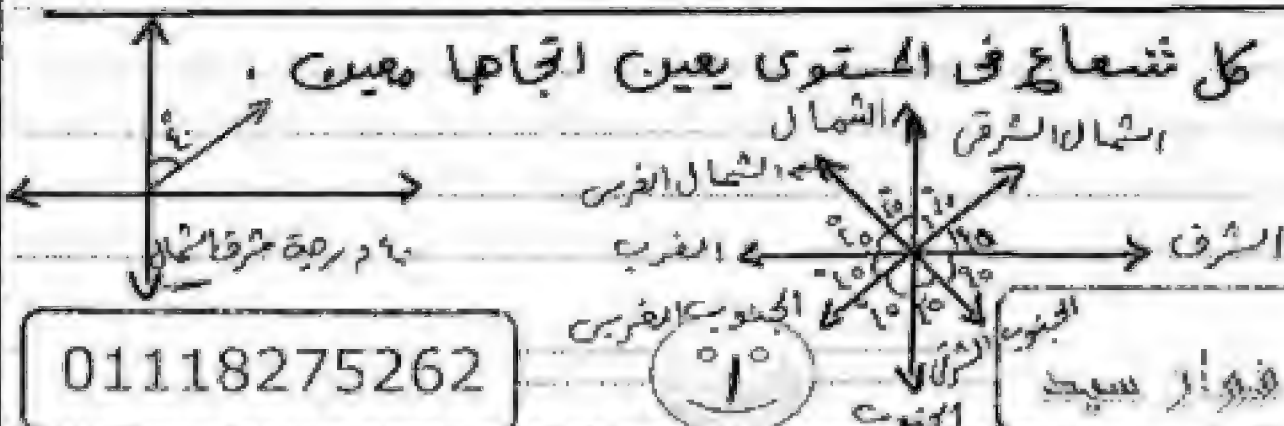
وتكون الازاحة الحادثة خلال الحركة هي 10 م

أي الازاحة $= \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ م من اتجاه P

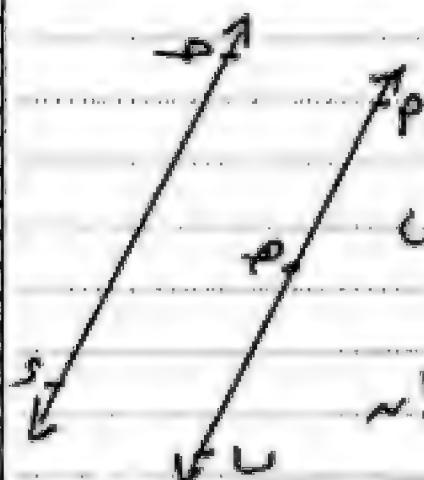
في الشكل المقابل

اصب المسافة والازاحة الحادثة عندما يتحرك من النقطة P الى النقطة Q
ثم يعود الى النقطة P المسافة = الازاحة =

الاتجاه



اذا كان $\vec{u} \parallel \vec{v}$ $\vec{u} = k\vec{v}$ $k \in \mathbb{R}$ فانه



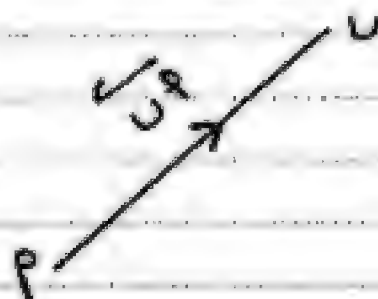
- $\vec{u} = k\vec{v}$ $k > 0$ لهما نفس الاتجاه ويحملهما مستقيم واحد
- $\vec{u} = k\vec{v}$ $k < 0$ لهما نفس الاتجاه ويحملهما مستقيمان متوازيان
- $\vec{u} = k\vec{v}$ $k < 0$ في اتجاهين متضادين ويحملهما مستقيم واحد
- $\vec{u} = k\vec{v}$ $k > 0$ في اتجاهين متضادين ويحملهما مستقيمان متوازيان

ملاحظة عامة

- الشعاعان المتجهان في الاتجاه أو المتضادان في الاتجاه يحملهما مستقيم واحد أو مستقيمان متوازيان والعكس صحيح
- الشعاعان المختلفان في الاتجاه لا يمكن أن يحملهما مستقيم واحد أو مستقيمان متوازيان

القطعة المستقيمة الموجهة

هي قطعة مستقيمة لها بداية ونقطة نهاية واتجاه



- نقط البداية « P »
- نقطة النهاية « U »
- اتجاه من P إلى U

لاحظ

$$\overline{PU} = \overline{UP} \quad \vec{u} = \vec{u}$$

$$\vec{u} \neq \vec{u} \quad \text{بينما} \quad \overline{PU} = \overline{UP}$$

≡ يقرأ يكافئ

مقياس القطعة المستقيمة الموجهة: - مقياس \vec{u} هو طول \overline{PU} ويرمز له بـ $\|\vec{u}\|$

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$$

مكافؤا قطعتين متجهيتين موجبتين

يقال لقطعتين موجبتين أنهما متكافئتان إذا كان لهما نفس المقياس والاتجاه

١٢ كس ٥ ٢ ع

١٣ ع ٤ ع

١٤ ع ٣ ع ١٥ ع ٢ ع

الحل

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ ١١ ١٢ ١٣ ١٤ ١٥ ١٦ ١٧ ١٨ ١٩ ٢٠ ٢١ ٢٢ ٢٣ ٢٤ ٢٥ ٢٦ ٢٧ ٢٨ ٢٩ ٣٠ ٣١ ٣٢ ٣٣ ٣٤ ٣٥ ٣٦ ٣٧ ٣٨ ٣٩ ٤٠ ٤١ ٤٢ ٤٣ ٤٤ ٤٥ ٤٦ ٤٧ ٤٨ ٤٩ ٥٠ ٥١ ٥٢ ٥٣ ٥٤ ٥٥ ٥٦ ٥٧ ٥٨ ٥٩ ٦٠ ٦١ ٦٢ ٦٣ ٦٤ ٦٥ ٦٦ ٦٧ ٦٨ ٦٩ ٧٠ ٧١ ٧٢ ٧٣ ٧٤ ٧٥ ٧٦ ٧٧ ٧٨ ٧٩ ٨٠ ٨١ ٨٢ ٨٣ ٨٤ ٨٥ ٨٦ ٨٧ ٨٨ ٨٩ ٩٠ ٩١ ٩٢ ٩٣ ٩٤ ٩٥ ٩٦ ٩٧ ٩٨ ٩٩ ١٠٠

مثال في مستوى اعداد متعامد

حين النقطة $P(1, 2)$ و $Q(2, 1)$
 $R(3, 1)$ و $S(1, 4)$
 $T(2, 3)$ و $U(1, 1)$
 $V(3, 2)$ و $W(2, 2)$
 $X(1, 3)$ و $Y(2, 4)$
 $Z(3, 3)$ و $AA(2, 1)$
 $AB(1, 2)$ و $AC(2, 3)$
 $AD(3, 4)$ و $AE(4, 1)$
 $AF(1, 3)$ و $AG(2, 4)$
 $AH(3, 2)$ و $AI(4, 3)$
 $AJ(1, 4)$ و $AK(2, 5)$
 $AL(3, 5)$ و $AM(4, 4)$
 $AN(5, 1)$ و $AO(1, 5)$
 $AP(2, 6)$ و $AQ(3, 6)$
 $AR(4, 5)$ و $AS(5, 2)$
 $AT(6, 1)$ و $AU(1, 6)$
 $AV(2, 7)$ و $AW(3, 7)$
 $AX(4, 6)$ و $AY(5, 3)$
 $AZ(6, 2)$ و $BA(1, 7)$
 $BB(2, 8)$ و $BC(3, 8)$
 $BD(4, 7)$ و $BE(5, 4)$
 $BF(6, 3)$ و $BG(7, 1)$
 $BH(1, 8)$ و $BI(2, 9)$
 $BJ(3, 9)$ و $BK(4, 8)$
 $BL(5, 5)$ و $BM(6, 4)$
 $BN(7, 2)$ و $BO(8, 1)$
 $BP(1, 9)$ و $BQ(2, 10)$
 $BR(3, 10)$ و $BS(4, 9)$
 $BT(5, 6)$ و $BU(6, 5)$
 $BV(7, 3)$ و $BW(8, 2)$
 $BX(9, 1)$ و $BY(1, 10)$
 $BZ(2, 11)$ و $CA(3, 11)$
 $CB(4, 11)$ و $CC(5, 11)$
 $CD(6, 11)$ و $CE(7, 11)$
 $CF(8, 11)$ و $CG(9, 11)$
 $CH(10, 11)$ و $CI(1, 12)$
 $CJ(2, 12)$ و $CK(3, 12)$
 $CL(4, 12)$ و $CM(5, 12)$
 $CN(6, 12)$ و $CO(7, 12)$
 $CP(8, 12)$ و $CQ(9, 12)$
 $CR(10, 12)$ و $CS(11, 11)$
 $CT(1, 13)$ و $CU(2, 13)$
 $CV(3, 13)$ و $CW(4, 13)$
 $CX(5, 13)$ و $CY(6, 13)$
 $CZ(7, 13)$ و $DA(8, 13)$
 $DB(9, 13)$ و $DC(10, 13)$
 $DD(11, 13)$ و $DE(12, 13)$
 $DF(1, 14)$ و $DG(2, 14)$
 $DH(3, 14)$ و $DI(4, 14)$
 $DJ(5, 14)$ و $DK(6, 14)$
 $DL(7, 14)$ و $DM(8, 14)$
 $DN(9, 14)$ و $DO(10, 14)$
 $DP(11, 14)$ و $DQ(12, 14)$
 $DR(1, 15)$ و $DS(2, 15)$
 $DT(3, 15)$ و $DU(4, 15)$
 $DV(5, 15)$ و $DW(6, 15)$
 $DX(7, 15)$ و $DY(8, 15)$
 $DZ(9, 15)$ و $EA(10, 15)$
 $EB(11, 15)$ و $EC(12, 15)$
 $ED(1, 16)$ و $EE(2, 16)$
 $EF(3, 16)$ و $EG(4, 16)$
 $EH(5, 16)$ و $EI(6, 16)$
 $EJ(7, 16)$ و $EK(8, 16)$
 $EL(9, 16)$ و $EO(10, 16)$
 $EP(11, 16)$ و $EQ(12, 16)$
 $ER(1, 17)$ و $ES(2, 17)$
 $ET(3, 17)$ و $EU(4, 17)$
 $EV(5, 17)$ و $EW(6, 17)$
 $EX(7, 17)$ و $EY(8, 17)$
 $EZ(9, 17)$ و $FA(10, 17)$
 $FB(11, 17)$ و $FC(12, 17)$
 $FD(1, 18)$ و $FE(2, 18)$
 $FG(3, 18)$ و $GH(4, 18)$
 $GI(5, 18)$ و $GJ(6, 18)$
 $GK(7, 18)$ و $GL(8, 18)$
 $GO(9, 18)$ و $GP(10, 18)$
 $GQ(11, 18)$ و $GR(12, 18)$
 $GS(1, 19)$ و $GT(2, 19)$
 $GU(3, 19)$ و $GV(4, 19)$
 $GW(5, 19)$ و $GX(6, 19)$
 $GY(7, 19)$ و $GZ(8, 19)$
 $HA(9, 19)$ و $HB(10, 19)$
 $HC(11, 19)$ و $HD(12, 19)$
 $HE(1, 20)$ و $HF(2, 20)$
 $HG(3, 20)$ و $HH(4, 20)$
 $HI(5, 20)$ و $HJ(6, 20)$
 $HK(7, 20)$ و $HL(8, 20)$
 $HO(9, 20)$ و $HP(10, 20)$
 $HQ(11, 20)$ و $HR(12, 20)$
 $HS(1, 21)$ و $HT(2, 21)$
 $HU(3, 21)$ و $HV(4, 21)$
 $HW(5, 21)$ و $HX(6, 21)$
 $HY(7, 21)$ و $HZ(8, 21)$
 $IA(9, 21)$ و $IB(10, 21)$
 $IC(11, 21)$ و $ID(12, 21)$
 $IE(1, 22)$ و $IF(2, 22)$
 $IG(3, 22)$ و $IH(4, 22)$
 $IJ(5, 22)$ و $IK(6, 22)$
 $IL(7, 22)$ و $IO(8, 22)$
 $IP(9, 22)$ و $IQ(10, 22)$
 $IR(11, 22)$ و $IS(12, 22)$
 $IT(1, 23)$ و $IU(2, 23)$
 $IV(3, 23)$ و $IW(4, 23)$
 $IX(5, 23)$ و $IY(6, 23)$
 $IZ(7, 23)$ و $JA(8, 23)$
 $JB(9, 23)$ و $JC(10, 23)$
 $JD(11, 23)$ و $JE(12, 23)$
 $JF(1, 24)$ و $JG(2, 24)$
 $JH(3, 24)$ و $JI(4, 24)$
 $JK(5, 24)$ و $JL(6, 24)$
 $JO(7, 24)$ و $JP(8, 24)$
 $JK(9, 24)$ و $JQ(10, 24)$
 $JR(11, 24)$ و $JS(12, 24)$
 $JT(1, 25)$ و $JU(2, 25)$
 $JV(3, 25)$ و $JW(4, 25)$
 $JX(5, 25)$ و $JY(6, 25)$
 $JZ(7, 25)$ و $KA(8, 25)$
 $KB(9, 25)$ و $KC(10, 25)$
 $KD(11, 25)$ و $KE(12, 25)$
 $KE(1, 26)$ و $KF(2, 26)$
 $KG(3, 26)$ و $KH(4, 26)$
 $KI(5, 26)$ و $KJ(6, 26)$
 $KL(7, 26)$ و $KO(8, 26)$
 $KP(9, 26)$ و $KQ(10, 26)$
 $KR(11, 26)$ و $KS(12, 26)$
 $KT(1, 27)$ و $KU(2, 27)$
 $KV(3, 27)$ و $KW(4, 27)$
 $KX(5, 27)$ و $KY(6, 27)$
 $KZ(7, 27)$ و $LA(8, 27)$
 $LB(9, 27)$ و $LC(10, 27)$
 $LD(11, 27)$ و $LE(12, 27)$
 $LE(1, 28)$ و $LF(2, 28)$
 $LG(3, 28)$ و $LH(4, 28)$
 $LJ(5, 28)$ و $LK(6, 28)$
 $LO(7, 28)$ و $LP(8, 28)$
 $LK(9, 28)$ و $LQ(10, 28)$
 $LR(11, 28)$ و $LS(12, 28)$
 $LT(1, 29)$ و $LU(2, 29)$
 $LV(3, 29)$ و $LW(4, 29)$
 $LX(5, 29)$ و $LY(6, 29)$
 $LZ(7, 29)$ و $MA(8, 29)$
 $MB(9, 29)$ و $MC(10, 29)$
 $MD(11, 29)$ و $ME(12, 29)$
 $ME(1, 30)$ و $MF(2, 30)$
 $MG(3, 30)$ و $MH(4, 30)$
 $MI(5, 30)$ و $MJ(6, 30)$
 $ML(7, 30)$ و $MO(8, 30)$
 $MP(9, 30)$ و $MQ(10, 30)$
 $MR(11, 30)$ و $MS(12, 30)$
 $MT(1, 31)$ و $MU(2, 31)$
 $MV(3, 31)$ و $MW(4, 31)$
 $MX(5, 31)$ و $MY(6, 31)$
 $MZ(7, 31)$ و $NA(8, 31)$
 $NB(9, 31)$ و $NC(10, 31)$
 $ND(11, 31)$ و $NE(12, 31)$
 $NE(1, 32)$ و $NF(2, 32)$
 $NG(3, 32)$ و $NH(4, 32)$
 $NJ(5, 32)$ و $NK(6, 32)$
 $NO(7, 32)$ و $NP(8, 32)$
 $NK(9, 32)$ و $NQ(10, 32)$
 $NR(11, 32)$ و $NS(12, 32)$
 $NT(1, 33)$ و $NU(2, 33)$
 $NV(3, 33)$ و $NW(4, 33)$
 $NX(5, 33)$ و $NY(6, 33)$
 $NZ(7, 33)$ و $OA(8, 33)$
 $OB(9, 33)$ و $OC(10, 33)$
 $OD(11, 33)$ و $OE(12, 33)$
 $OE(1, 34)$ و $OF(2, 34)$
 $OG(3, 34)$ و $OH(4, 34)$
 $OJ(5, 34)$ و $OK(6, 34)$
 $OL(7, 34)$ و $OO(8, 34)$
 $OP(9, 34)$ و $OQ(10, 34)$
 $OR(11, 34)$ و $OS(12, 34)$
 $OT(1, 35)$ و $OU(2, 35)$
 $OV(3, 35)$ و $OW(4, 35)$
 $OX(5, 35)$ و $OY(6, 35)$
 $OZ(7, 35)$ و $PA(8, 35)$
 $PB(9, 35)$ و $PC(10, 35)$
 $PD(11, 35)$ و $PE(12, 35)$
 $PE(1, 36)$ و $PF(2, 36)$
 $PG(3, 36)$ و $PH(4, 36)$
 $PJ(5, 36)$ و $PK(6, 36)$
 $PO(7, 36)$ و $PP(8, 36)$
 $PK(9, 36)$ و $PQ(10, 36)$
 $PR(11, 36)$ و $PS(12, 36)$
 $PT(1, 37)$ و $PU(2, 37)$
 $PV(3, 37)$ و $PW(4, 37)$
 $PX(5, 37)$ و $PY(6, 37)$
 $PZ(7, 37)$ و $QA(8, 37)$
 $QB(9, 37)$ و $QC(10, 37)$
 $QD(11, 37)$ و $QE(12, 37)$
 $QE(1, 38)$ و $QF(2, 38)$
 $QG(3, 38)$ و $QH(4, 38)$
 $QJ(5, 38)$ و $QK(6, 38)$
 $QO(7, 38)$ و $QP(8, 38)$
 $QK(9, 38)$ و $QQ(10, 38)$
 $QR(11, 38)$ و $QS(12, 38)$
 $QT(1, 39)$ و $QU(2, 39)$
 $QV(3, 39)$ و $QW(4, 39)$
 $QX(5, 39)$ و $QY(6, 39)$
 $QZ(7, 39)$ و $RA(8, 39)$
 $RB(9, 39)$ و $RC(10, 39)$
 $RD(11, 39)$ و $RE(12, 39)$
 $RE(1, 40)$ و $RF(2, 40)$
 $RG(3, 40)$ و $RH(4, 40)$
 $RJ(5, 40)$ و $RK(6, 40)$
 $RO(7, 40)$ و $RP(8, 40)$
 $RK(9, 40)$ و $RQ(10, 40)$
 $RR(11, 40)$ و $RS(12, 40)$
 $RT(1, 41)$ و $RU(2, 41)$
 $RV(3, 41)$ و $RW(4, 41)$
 $RX(5, 41)$ و $RY(6, 41)$
 $RZ(7, 41)$ و $SA(8, 41)$
 $SB(9, 41)$ و $SC(10, 41)$
 $SD(11, 41)$ و $SE(12, 41)$
 $SE(1, 42)$ و $SF(2, 42)$
 $SG(3, 42)$ و $SH(4, 42)$
 $SJ(5, 42)$ و $SK(6, 42)$
 $SO(7, 42)$ و $SP(8, 42)$
 $SK(9, 42)$ و $SQ(10, 42)$
 $SR(11, 42)$ و $SS(12, 42)$
 $ST(1, 43)$ و $SU(2, 43)$
 $SV(3, 43)$ و $SW(4, 43)$
 $SX(5, 43)$ و $SY(6, 43)$
 $SZ(7, 43)$ و $TA(8, 43)$
 $TB(9, 43)$ و $TC(10, 43)$
 $TD(11, 43)$ و $TE(12, 43)$
 $TE(1, 44)$ و $TF(2, 44)$
 $TG(3, 44)$ و $TH(4, 44)$
 $TJ(5, 44)$ و $TK(6, 44)$
 $TO(7, 44)$ و $TP(8, 44)$
 $TK(9, 44)$ و $TQ(10, 44)$
 $TR(11, 44)$ و $TS(12, 44)$
 $TT(1, 45)$ و $TU(2, 45)$
 $TV(3, 45)$ و $TW(4, 45)$
 $TX(5, 45)$ و $TY(6, 45)$
 $TZ(7, 45)$ و $UA(8, 45)$
 $UB(9, 45)$ و $UC(10, 45)$
 $UD(11, 45)$ و $UE(12, 45)$
 $UE(1, 46)$ و $UF(2, 46)$
 $UG(3, 46)$ و $UH(4, 46)$
 $UJ(5, 46)$ و $UK(6, 46)$
 $UO(7, 46)$ و $UP(8, 46)$
 $UK(9, 46)$ و $UQ(10, 46)$
 $UR(11, 46)$ و $US(12, 46)$
 $UT(1, 47)$ و $UU(2, 47)$
 $UV(3, 47)$ و $UW(4, 47)$
 $UX(5, 47)$ و $UY(6, 47)$
 $UZ(7, 47)$ و $VA(8, 47)$
 $VB(9, 47)$ و $VC(10, 47)$
 $VD(11, 47)$ و $VE(12, 47)$
 $VE(1, 48)$ و $VF(2, 48)$
 $VG(3, 48)$ و $VH(4, 48)$
 $VJ(5, 48)$ و $VK(6, 48)$
 $VO(7, 48)$ و $VP(8, 48)$
 $VK(9, 48)$ و $VQ(10, 48)$
 $VR(11, 48)$ و $VS(12, 48)$
 $VT(1, 49)$ و $VU(2, 49)$
 $VV(3, 49)$ و $VW(4, 49)$
 $VX(5, 49)$ و $VY(6, 49)$
 $VZ(7, 49)$ و $WA(8, 49)$
 $WB(9, 49)$ و $WC(10, 49)$
 $WD(11, 49)$ و $WE(12, 49)$
 $WE(1, 50)$ و $WF(2, 50)$
 $WG(3, 50)$ و $WH(4, 50)$
 $WJ(5, 50)$ و $WK(6, 50)$
 $WO(7, 50)$ و $WP(8, 50)$
 $WK(9, 50)$ و $WQ(10, 50)$
 $WR(11, 50)$ و $WS(12, 50)$
 $WT(1, 51)$ و $WU(2, 51)$
 $WV(3, 51)$ و $WW(4, 51)$
 $WX(5, 51)$ و $WY(6, 51)$
 $WZ(7, 51)$ و $XA(8, 51)$
 $XB(9, 51)$ و $XC(10, 51)$
 $XD(11, 51)$ و $XE(12, 51)$
 $XE(1, 52)$ و $XF(2, 52)$
 $YG(3, 52)$ و $YH(4, 52)$
 $YJ(5, 52)$ و $YK(6, 52)$
 $YO(7, 52)$ و $YP(8, 52)$
 $YK(9, 52)$ و $YQ(10, 52)$
 $YR(11, 52)$ و $YS(12, 52)$
 $YT(1, 53)$ و $YU(2, 53)$
 $YV(3, 53)$ و $YW(4, 53)$
 $YX(5, 53)$ و $YY(6, 53)$
 $YZ(7, 53)$ و $ZA(8, 53)$
 $ZB(9, 53)$ و $ZC(10, 53)$
 $ZD(11, 53)$ و $ZE(12, 53)$
 $ZE(1, 54)$ و $ZF(2, 54)$
 $ZG(3, 54)$ و $ZH(4, 54)$
 $ZJ(5, 54)$ و $ZK(6, 54)$
 $ZO(7, 54)$ و $ZP(8, 54)$
 $ZK(9, 54)$ و $ZQ(10, 54)$
 $ZR(11, 54)$ و $ZS(12, 54)$
 $ZT(1, 55)$ و $ZU(2, 55)$
 $ZV(3, 55)$ و $ZW(4, 55)$
 $ZX(5, 55)$ و $ZY(6, 55)$
 $ZZ(7, 55)$ و $AA(8, 55)$
 $AB(9, 55)$ و $AC(10, 55)$
 $AD(11, 55)$ و $AE(12, 55)$
 $AE(1, 56)$ و $AF(2, 56)$
 $AG(3, 56)$ و $AH(4, 56)$
 $AJ(5, 56)$ و $AK(6, 56)$
 $AO(7, 56)$ و $AP(8, 56)$
 $AK(9, 56)$ و $AQ(10, 56)$
 $AR(11, 56)$ و $AS(12, 56)$
 $AT(1, 57)$ و $AU(2, 57)$
 $AV(3, 57)$ و $AW(4, 57)$
 $AX(5, 57)$ و $AY(6, 57)$
 $AZ(7, 57)$ و $BA(8, 57)$
 $BB(9, 57)$ و $BC(10, 57)$
 $BD(11, 57)$ و $BE(12, 57)$
 $BE(1, 58)$ و $BF(2, 58)$
 $BG(3, 58)$ و $BH(4, 58)$
 $BJ(5, 58)$ و $BK(6, 58)$
 $BO(7, 58)$ و $BP(8, 58)$
 $BK(9, 58)$ و $BQ(10, 58)$
 $BR(11, 58)$ و $BS(12, 58)$
 $BT(1, 59)$ و $BU(2, 59)$
 $BV(3, 59)$ و $BW(4, 59)$
 $BX(5, 59)$ و $BY(6, 59)$
 $BZ(7, 59)$ و $CA(8, 59)$
 $CB(9, 59)$ و $CC(10, 59)$
 $CD(11, 59)$ و $CE(12, 59)$
 $CE(1, 60)$ و $CF(2, 60)$
 $CG(3, 60)$ و $CH(4, 60)$
 $CJ(5, 60)$ و $CK(6, 60)$
 $CO(7, 60)$ و $CP(8, 60)$
 $CK(9, 60)$ و $CQ(10, 60)$
 $CR(11, 60)$ و $CS(12, 60)$
 $CT(1, 61)$ و $CU(2, 61)$
 $CV(3, 61)$ و $CW(4, 61)$
 $CX(5, 61)$ و $CY(6, 61)$
 $CZ(7, 61)$ و $DA(8, 61)$
 $DB(9, 61)$ و $DC(10, 61)$
 $DD(11, 61)$ و $DE(12, 61)$
 $DE(1, 62)$ و $DF(2, 62)$
 $DG(3, 62)$ و $DH(4, 62)$
 $DJ(5, 62)$ و $DK(6, 62)$
 $DO(7, 62)$ و $DP(8, 62)$
 $DK(9, 62)$ و $DQ(10, 62)$
 $DR(11, 62)$ و $DS(12, 62)$
 $DT(1, 63)$ و $DU(2, 63)$
 $DV(3, 63)$ و $DW(4, 63)$
 $DX(5, 63)$ و $DY(6, 63)$
 $DZ(7, 63)$ و $EA(8, 63)$
 $EB(9, 63)$ و $EC(10, 63)$
 $ED(11, 63)$ و $EE(12, 63)$
 $EE(1, 64)$ و $EF(2, 64)$
 $EG(3, 64)$ و $EH(4, 64)$
 $EJ(5, 64)$ و $EK(6, 64)$
 $EO(7, 64)$ و $EP(8, 64)$
 $EK(9, 64)$ و $EQ(10, 64)$
 $ER(11, 64)$ و $ES(12, 64)$
 $ET(1, 65)$ و $EU(2, 65)$
 $EV(3, 65)$ و $EW(4, 65)$
 $EX(5, 65)$ و $EY(6, 65)$
 $EZ(7, 65)$ و $FA(8, 65)$
 $FB(9, 65)$ و $FC(10, 65)$
 $FD(11, 65)$ و $FE(12, 65)$
 $FE(1, 66)$ و $FF(2, 66)$
 $FG(3, 66)$ و $FH(4, 66)$
 $FJ(5, 66)$ و $FK(6, 66)$
 $FO(7, 66)$ و $FP(8, 66)$
 $FK(9, 66)$ و $FQ(10, 66)$
 $FR(11, 66)$ و $FS(12, 66)$
 $FT(1, 67)$ و $FU(2, 67)$
 $FV(3, 67)$ و $FW(4, 67)$
 $FX(5, 67)$ و $FY(6, 67)$
 $FZ(7, 67)$ و $GA(8, 67)$
 $GB(9, 67)$ و $GC(10, 67)$
 $GD(11, 67)$ و $GE(12, 67)$
 $GE(1, 68)$ و $GF(2, 68)$
 $GG(3, 68)$ و $GH(4, 68)$
 $GJ(5, 68)$ و $GK(6, 68)$
 $GO(7, 68)$ و $GP(8, 68)$
 $GK(9, 68)$ و $GQ(10, 68)$
 $GR(11, 68)$ و $GS(12, 68)$
 $GT(1, 69)$ و $GU(2, 69)$

مثال من مستوى إحداثيات متعامد

أذا كانت $P(3-1-4)$ و $U(4-2-4)$
 $P(3-1-4)$ و $U(4-2-4)$
 ١) ارسم مستوي تكافؤ P و U معين
 إحداثيات النقطتين
 ٢) عين إحداثيات النقطتين M منتصف
 P و U ثم حدد القطع المستقيمة
 الموهومة التي تكافؤ

١) $U(4-2-4)$ و $M(3-1-4)$ و $U(4-2-4)$

٢) هل الشكل P و U متوازي أم لا

الحل

١) باستخدام الانتقال حيث أن P
 من صورة U بالانتقال $(4-2-4) \rightarrow (3-1-4)$
 $(4-2-4) =$

٢) U هي صورة P بنفس الانتقال
 $(3-1-4) = (4-2-4) \rightarrow (3-1-4)$

٣) M منتصف P و U

$M = \left(\frac{4+3}{2}, \frac{-2+(-1)}{2}, \frac{-4+(-4)}{2} \right) = (3.5, -1.5, -4)$

٤) $U = M$ و $P = M$

و تكافؤ أي قطعتين متتامتين (مترافقتين) لنفس
 المعيار والارتفاع

٥) $M = P$ و $M = U$

٦) $P = U$ و $P = M$

٧) $U = P$ و $U = M$

٨) $P = U$ و $P = M$

٩) $U = P$ و $U = M$

١٠) $P = U$ و $P = M$

١١) $U = P$ و $U = M$

مثال من مستوى إحداثيات متعامد

أذا كانت $P(3-1-4)$ و $U(4-2-4)$
 $P(3-1-4)$ و $U(4-2-4)$
 ١) ارسم مستوي تكافؤ P و U معين
 إحداثيات النقطتين
 ٢) عين إحداثيات النقطتين M منتصف
 P و U ثم حدد القطع المستقيمة
 الموهومة التي تكافؤ

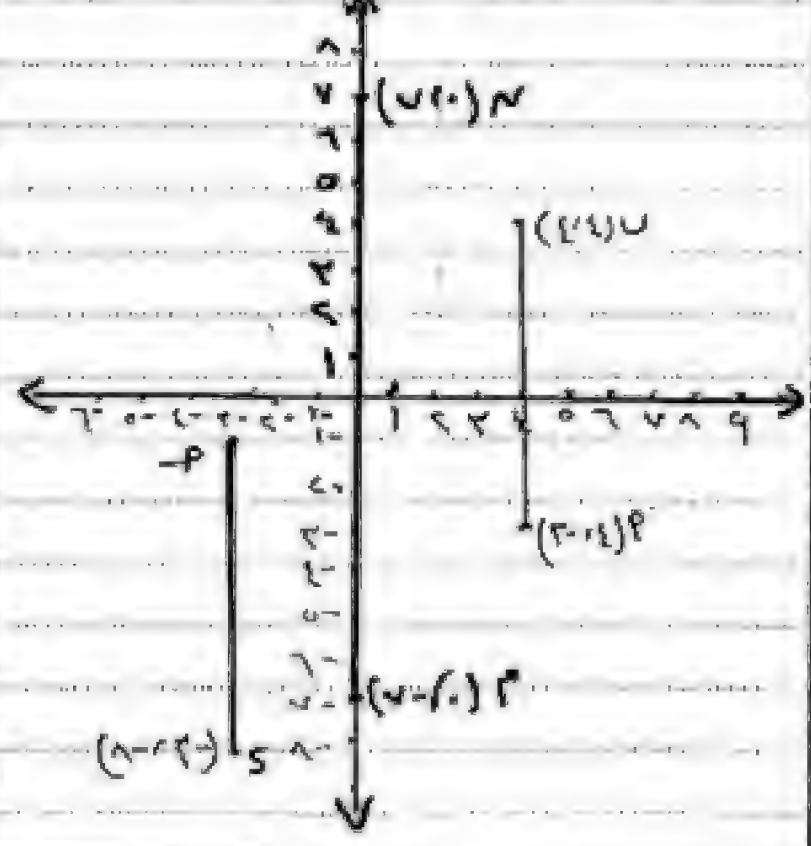
الحل

صورة U بالانتقال $(4-2-4) \rightarrow (3-1-4)$

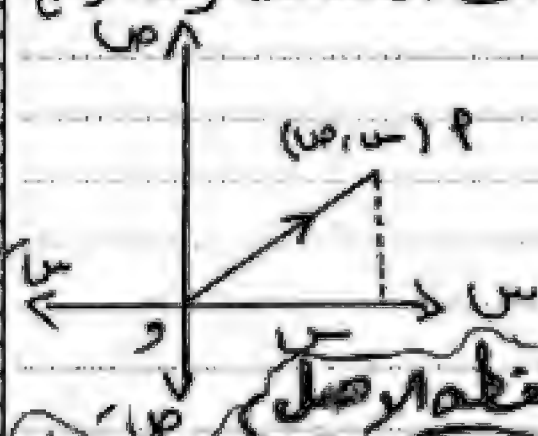
$(4-2-4) =$

١) U هي صورة P بنفس الانتقال

٢) P هي صورة U بنفس الانتقال

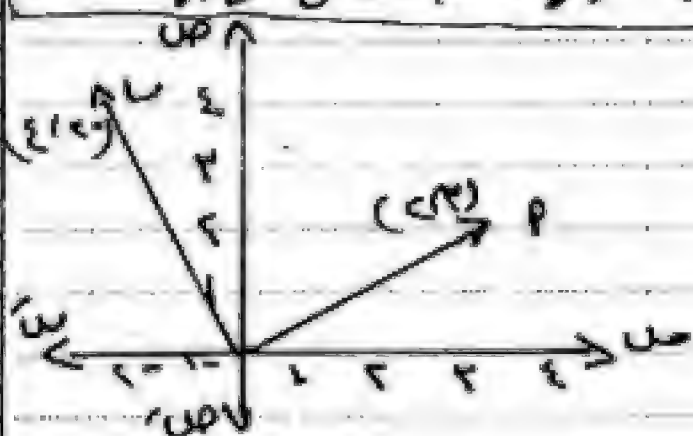


يمكن تعيين موقع النقط P من المستوى الإحداثي المتعامد لمعرفه الزوج المرتب (x, y) حيث لكل نقطه من المستوى الإحداثي موقع وحيد بالنسبة للنقطه الأصل O



متجه الوضعية لنقطه معلومه بالنسبة لنقطه الأصل

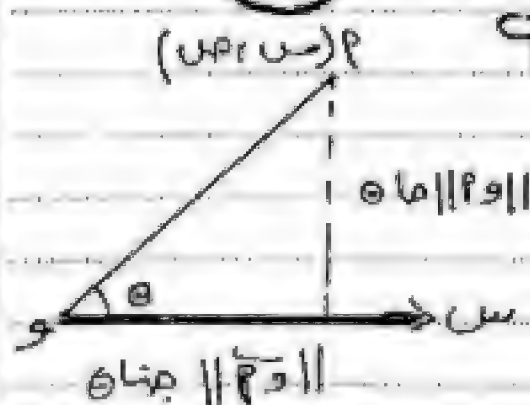
هو القطعه المستقيمة الموجهه التي يهاتها نقطه الأصل ونهايتها النقطه المعلومه



مثلاً:
إذا كان $P(2, 3)$ و $Q(-1, 4)$
فأدناه \vec{OP} هو متجه الموضعية لنقطه P
بالنسبة لنقطه الأصل ويمكن كتابته $\vec{OP} = (2, 3)$
وهكذا متجه الموضعية لنقطه Q
و $\vec{OQ} = (-1, 4)$

ملاحظة
نظراً لأن كل متجهان الموضعية لهما نفس نقطه البداية O
(و) فإن يمكننا استبدال \vec{OP} و \vec{OQ} بـ \vec{P}
أي $\vec{P} = (2, 3)$ و $\vec{Q} = (-1, 4)$

الصورة القطبية لمتجه الموضعية



\vec{P} يصنع زاويه θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات
كما أنه معياره $||\vec{P}||$
فيكون $\vec{P} = (||\vec{P}|| \cos \theta, ||\vec{P}|| \sin \theta)$
إحداثيات النقطه P من المستوى المتعامد

$\vec{P} = (||\vec{P}|| \cos \theta, ||\vec{P}|| \sin \theta)$
 $\vec{P} = (||\vec{P}|| \cos \theta, ||\vec{P}|| \sin \theta)$
 $\vec{P} = (||\vec{P}|| \cos \theta, ||\vec{P}|| \sin \theta)$

مقياس الاتجاه

هو طول القطعة المستقيمة الممتدة للمتحرك
 فإذا كان $\vec{P} = (x, y)$ فانه مقياس (طول)
 المتجه \vec{P} يرمز له بالرمز $\|\vec{P}\|$ حيث $\|\vec{P}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

مثال ١ في مستوى إحداثي متعامد
 إذا كانت: $P(6, 6)$

أوجد الصورة القطبية لمتجه الموضع
 للنقطة P بالنسبة لنقطة الأصل O .

الحل:

$\vec{OP} = (6, 6)$ \Rightarrow $\vec{OP} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{6}{6}\right) = \arctan(1) = 45^\circ$

نلاحظ $\frac{y}{x} = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$

$\therefore \theta = 45^\circ$
 $\vec{P} = (6, 6) = 6\sqrt{2} \angle 45^\circ$

مثال ٢ في مستوى إحداثي متعامد
 إذا كان $\vec{P} = (-3, 1)$

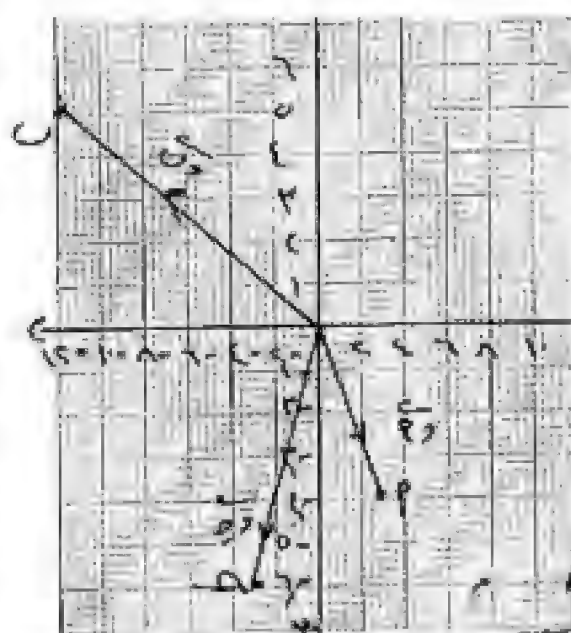
أوجد المتجه \vec{P} في الصورة القطبية

$\vec{P} = \left(1\sqrt{10} \angle \frac{10\pi}{6}\right)$

مثال ٢ في مستوى إحداثي متعامد
 $P(3, -4)$ و $Q(4, -5)$

أوجد متجه الموضع لكل من
 النقطة P والنقطة Q بالنسبة لنقطة
 الأصل $O(0, 0)$ ثم أوجد مقياس كل منهما

الحل:



متجه الموضع لنقطة P هو $\vec{OP} = (3, -4)$
 و $\vec{OQ} = (4, -5)$

متجه الموضع لنقطة Q هو $\vec{OQ} = (4, -5)$
 متجه الموضع لنقطة P هو $\vec{OP} = (3, -4)$

$\|\vec{OP}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$
 إذن $\|\vec{OP}\| = 5$ و $\|\vec{OQ}\| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$
 إذن $\|\vec{OQ}\| = \sqrt{41}$

العمليات على المتجهات

المتجهات: عنا صر المجموعة ح مع علية الجمع والضرب المعرفتين عليها تسمى متجهات

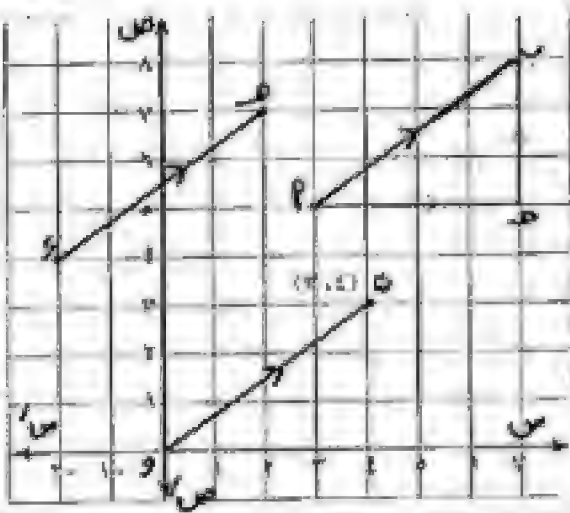
المتجه الصفري: يعرف بـ $(0,0)$ بالمتجه الصفري

ويكون $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ والمتجه الصفري غير معين لإرتقاء

المتجهات المتكافئة: كل متجه $a = (u, v)$ يمكن تمثيله هندسياً

بالعدي من القطع المستقيمة الموجهة المتكافئة

والتي كل منها تكافئ متجه الموضع للنقطة $a = (u, v)$



لنفرض أن جسمًا يتحرك من a حتى b يصل إلى c بعد ذلك قطع a و b و c هي إحداثيات إلى العين و a و b و c هي إحداثيات إلى العين a و b و c هي إحداثيات إلى العين a و b و c هي إحداثيات إلى العين

بعد غير منتته من القطع المستقيمة الموجهة المتكافئة المتوازية والتي تكافئ كل منها a

$$a = (3, 4) = b = \dots = c = \dots$$

ويكون $a = (3, 4) = b = \dots = c = \dots$ و $a = (3, 4) = b = \dots = c = \dots$

جمع المتجهات جبرياً

$$a = (u, v) = b = (u, v)$$

$$a = (u, v) = b = (u, v)$$

$$a + b = (u + u, v + v) = (2u, 2v)$$

من زرع حصر

خواص عمليّة الجمع

ضرب متجه في عدد حقيقي

كل $\vec{a} = (a_1, a_2)$ \Rightarrow $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 b_1, a_2 b_2)$

فإنه: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 b_1, a_2 b_2)$

تكافؤ قطعتين مستقيمتين موجبتين

تتكاثر القطعتان المستقيمتان الموجبتان إذا كان لهما نفس الطول ونفس الاتجاه بعن إذا كانت: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 b_1, a_2 b_2)$

لا ممان إذا كانت $\vec{a} = (a_1, a_2)$ $\vec{b} = (b_1, b_2)$ \Rightarrow $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 b_1, a_2 b_2)$

فإن $\vec{a} = \vec{b} = (a_1, a_2)$ ونقول عندها المتجه $\vec{a} = \vec{b}$

متجه الوحدة هو متجه معيار الوحدة (الواحد الصحيح)

مثال إذا كانت $\vec{a} = (1, 2)$ $\vec{b} = (2, 1)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2) \cdot (2, 1) = 2 + 2 = 4$

الحل

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2) \cdot (2, 1) = 2 + 2 = 4$

$(2, 1) = (2, 1)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2) \cdot (2, 1) = 2 + 2 = 4$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2) \cdot (2, 1) = 2 + 2 = 4$

إذا كانت $\vec{a} = (1, 2)$ $\vec{b} = (2, 1)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2) \cdot (2, 1) = 2 + 2 = 4$

أو $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2) \cdot (2, 1) = 2 + 2 = 4$

مثال إذا كانت $\vec{a} = (1, 2)$ $\vec{b} = (2, 1)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2) \cdot (2, 1) = 2 + 2 = 4$

أو $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2) \cdot (2, 1) = 2 + 2 = 4$

الحل

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2) \cdot (2, 1) = 2 + 2 = 4$

$(2, 1) = (2, 1)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2) \cdot (2, 1) = 2 + 2 = 4$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2) \cdot (2, 1) = 2 + 2 = 4$

$(2, 1) = (2, 1)$

أو

مثال ٢

إذا كان $\bar{P} = (1, 3)$

$$\bar{N} = (4, 6) \quad \bar{Q} = (2, 0)$$

$$① \text{ أثبت أنه } \bar{P} + \bar{N} - \bar{Q} = \bar{O}$$

$$② \text{ أوجد قيمته } \bar{Q} - \bar{N} = \bar{K} = \bar{K} + \bar{P} = \bar{K} + (1, 3)$$

الحل

$$① \text{ لا يلزم } \bar{K} = (1, 3) + (4, 6) = (5, 9)$$

$$\bar{Q} = (2, 0)$$

$$\bar{P} + \bar{N} - \bar{Q} = (1, 3) + (4, 6) - (2, 0) = (3, 9)$$

$$\bar{O} = (0, 0) \quad \bar{K} = (3, 9) + \bar{O} = (3, 9)$$

$$\bar{K} = (3, 9) + \bar{O} = (3, 9)$$

$$② \bar{P} + \bar{N} = (1, 3) + (4, 6) = (5, 9) = \bar{K}$$

$$\bar{K} = (5, 9) = (5, 9) = \bar{K} = (5, 9)$$

$$\bar{K} = (5, 9) = \bar{K} = (5, 9)$$

$$\bar{K} = (5, 9) = \bar{K} = (5, 9)$$

$$\bar{K} = (5, 9) = \bar{K} = (5, 9)$$

*

$$\bar{K} = (5, 9) = \bar{K} = (5, 9)$$

$$\bar{K} = (5, 9) = \bar{K} = (5, 9)$$

فأوجد قيمة \bar{K} التي تحقق

$$\bar{K} = \bar{P} + \bar{N} - \bar{Q}$$

كيفية كتابته مع بدلالة متجهين
مثلاً \bar{K} عايز آتية بدلالة \bar{P} و \bar{N}
فيبقى $\bar{K} = \text{ثابت} \times \bar{P} + \text{ثابت} \times \bar{N}$

ل

ن

نطلع معادلتين ونحلهم
ونطلع قيم ل و ن ثم نعوض مباشرة
عنه المتجه \bar{K}

مثال ٣

$$\bar{N} = (5, 3) \text{ عبر عن المتجه}$$

$$\bar{K} = (1, 1) \text{ بدلالة}$$

$$\bar{P} \text{ و } \bar{L}$$

الحل

$$\text{نفرض } \bar{K} = \bar{L} + \bar{P}$$

$$\therefore \bar{K} = (1, 1) = \bar{L} + (5, 3) = (1, 1)$$

$$\therefore \bar{L} = (1, 1) - (5, 3) = (-4, -2)$$

$$\bar{L} = (-4, -2) = \bar{L} = (-4, -2)$$

$$\text{بضرب } ① \times ② \text{ و } ③ \times ④ \text{ والجمع}$$

$$\therefore \bar{L} = (-4, -2) = \bar{L} = (-4, -2)$$

$$\bar{L} = (-4, -2) = \bar{L} = (-4, -2)$$

$$\bar{L} = (-4, -2) = \bar{L} = (-4, -2)$$

$$\bar{L} = (-4, -2) = \bar{L} = (-4, -2)$$

$$\bar{L} = (-4, -2) = \bar{L} = (-4, -2)$$

$$\bar{L} = (-4, -2) = \bar{L} = (-4, -2)$$

$$\bar{L} = (-4, -2) = \bar{L} = (-4, -2)$$

$$\bar{L} = (-4, -2) = \bar{L} = (-4, -2)$$

إذا كان $\vec{A} = (3-1, 2)$ و $\vec{B} = (5, -2)$ و $\vec{C} = (12, 0)$ عبر \vec{C} بدلالة \vec{A} و \vec{B}

متجه الوحدة الأساسي

$\vec{e}_1 = (1, 0)$ اتجاهه هو محور السينات الموجب

$\vec{e}_2 = (0, 1)$ اتجاهه هو محور الصادات الموجب

مثاله إذا كان $\vec{A} = (3-1, 2)$ و $\vec{B} = (5, -2)$ و $\vec{C} = (12, 0)$

أكتب كل متجه \vec{A} و \vec{B} و \vec{C} بدلالة متجهي الوحدة

الأساسيين

ثم أوجد $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ و $\vec{A} - \vec{B}$ و $\vec{A} \cdot \vec{B}$

الحل

$\vec{A} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ و $\vec{B} = 5\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ و $\vec{C} = 12\vec{e}_1$

① $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (3+5+12)\vec{e}_1 + (-1-2+0)\vec{e}_2 = 20\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$

② $\vec{A} - \vec{B} = (3-5)\vec{e}_1 + (-2+2)\vec{e}_2 = -2\vec{e}_1$

③ $\vec{A} \cdot \vec{B} = (3-1) \cdot (5-2) = 2 \cdot 3 = 6$

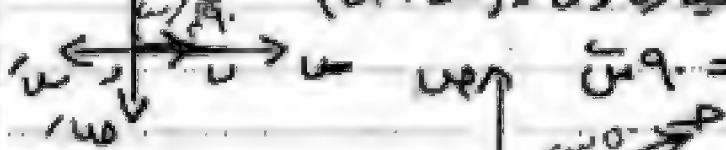
$\vec{A} \cdot \vec{C} = (3-1) \cdot 12 = 24$ و $\vec{B} \cdot \vec{C} = 5 \cdot 12 = 60$

مثاله وجد بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين المتجه الذي يعبر عن

① السرعة المنتظمة لسيارة تقطع 90 كم كل ساعة من اتجاه الشرق

② قوه مقدارها 5 نيوتن تؤثر من نقطة مادية في اتجاه 30° شمالاً للشرق

الحل ① بفرض أن متجه الموضع لسيارة السرعة $\vec{v} = (90, 0)$ و $\vec{e}_1 = (1, 0)$ و $\vec{e}_2 = (0, 1)$



② $\vec{F} = 5 \cos 30^\circ \vec{e}_1 + 5 \sin 30^\circ \vec{e}_2$

$\vec{F} = 4.33\vec{e}_1 + 2.5\vec{e}_2$

أو $\vec{F} = (4.33, 2.5)$

أ. مصطفى فيواز سبيط

توازي وتعامد متجهين

الميل = $\frac{y}{x}$

① شرط التوازي $m_1 = m_2$

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

$$1 = 1 \text{ أو } 2 = 2 \text{ أو } 3 = 3$$

② شرط التعامد $m_1 \times m_2 = -1$

$$1 = -1 \text{ أو } 2 = -2 \text{ أو } 3 = -3$$

$$1 = 1 \text{ أو } 2 = 2 \text{ أو } 3 = 3$$

مثال إذا كانت $\vec{P} = (2, 1)$

$\vec{Q} = (1, 2)$ احس قيمة m

التي تجعل ① $\vec{P} \parallel \vec{Q}$

② $\vec{P} \perp \vec{Q}$

الحل

① $\vec{P} \parallel \vec{Q} \iff$ ميل الأول = $\frac{2}{1}$

ميل الثاني = $\frac{1}{2}$

$$\frac{2}{1} = \frac{1}{2} \implies 4 = 1 \text{ (غير ممكن)}$$

$$m = 2$$

② $\vec{P} \perp \vec{Q} \iff$ ميل الأول \times ميل الثاني = -1

$$\frac{2}{1} \times \frac{1}{2} = -1 \implies 1 = -1 \text{ (غير ممكن)}$$

إذا كانت $\vec{P} = (2, 1)$ و $\vec{Q} = (1, 2)$
فاوجد قيمة m عند ① $\vec{P} \parallel \vec{Q}$
② $\vec{P} \perp \vec{Q}$

مثال

إذا كانت $\vec{P} = (2, 1)$ و $\vec{Q} = (1, 2)$
فاوجد قيمة m عند ① $\vec{P} \parallel \vec{Q}$
② $\vec{P} \perp \vec{Q}$

③ إذا كانت $\vec{P} = (2, 1)$ و $\vec{Q} = (1, 2)$
فاوجد قيمة m عند ① $\vec{P} \parallel \vec{Q}$
② $\vec{P} \perp \vec{Q}$

④ إذا كانت $\vec{P} = (2, 1)$ و $\vec{Q} = (1, 2)$
فاوجد قيمة m عند ① $\vec{P} \parallel \vec{Q}$
② $\vec{P} \perp \vec{Q}$

⑤ إذا كانت $\vec{P} = (2, 1)$ و $\vec{Q} = (1, 2)$
فاوجد قيمة m عند ① $\vec{P} \parallel \vec{Q}$
② $\vec{P} \perp \vec{Q}$

الحل

① ميل الأول = $\frac{2}{1}$

ميل الثاني = $\frac{1}{2}$

② $\frac{2}{1} = \frac{1}{2} \implies 4 = 1$

③ $\frac{2}{1} \times \frac{1}{2} = -1 \implies 1 = -1$

④ $\frac{2}{1} = \frac{1}{2} \implies 4 = 1$

⑤ $\frac{2}{1} \times \frac{1}{2} = -1 \implies 1 = -1$

⑥ $\frac{2}{1} = \frac{1}{2} \implies 4 = 1$

⑦ $\frac{2}{1} \times \frac{1}{2} = -1 \implies 1 = -1$

⑧ $\frac{2}{1} = \frac{1}{2} \implies 4 = 1$

⑨ $\frac{2}{1} \times \frac{1}{2} = -1 \implies 1 = -1$

⑩ $\frac{2}{1} = \frac{1}{2} \implies 4 = 1$

⑪ $\frac{2}{1} \times \frac{1}{2} = -1 \implies 1 = -1$

⑫ $\frac{2}{1} = \frac{1}{2} \implies 4 = 1$

⑬ $\frac{2}{1} \times \frac{1}{2} = -1 \implies 1 = -1$

خاتمة بالك $\frac{m}{n} // \frac{p}{q}$ له m

مساها $\frac{p}{q} // \frac{m}{n}$

$\frac{p}{q} = \frac{1}{\frac{q}{p}}$

لـ $\frac{p}{q}$ مقلوب $\frac{q}{p}$

|| له m || = || له n || m ||

مثال إذا كان

$$|| \frac{3}{2} || = || \frac{10}{15} ||$$

أصبح قيمه له

$$|| \frac{3}{2} || = || \frac{10}{15} || = || \frac{2}{3} ||$$

$$|| \frac{2}{3} || = || \frac{10}{15} || = || \frac{2}{3} ||$$

$$|| \frac{2}{3} || = || \frac{10}{15} ||$$

$$|| \frac{2}{3} || = || \frac{10}{15} || = || \frac{2}{3} ||$$

فأدنه له =

$$|| \frac{2}{3} || = || \frac{10}{15} || = || \frac{2}{3} ||$$

فأدنه له =

الواجب

لا أكمل مسائل امتحانات

$$|| \frac{2}{3} || = || \frac{10}{15} || = || \frac{2}{3} ||$$

$$|| \frac{2}{3} || = || \frac{10}{15} || = || \frac{2}{3} ||$$

(الجزء 2017)

$$|| \frac{2}{3} || = || \frac{10}{15} || = || \frac{2}{3} ||$$

موضع للنقطة P فإنه P =

(بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين)

[الجزء 2017]

$$|| \frac{2}{3} || = || \frac{10}{15} || = || \frac{2}{3} ||$$

فإن P =

$$|| \frac{2}{3} || = || \frac{10}{15} || = || \frac{2}{3} ||$$

الصورة القطبية لـ P =

هي . [القاهرة 2017]

$$|| \frac{2}{3} || = || \frac{10}{15} || = || \frac{2}{3} ||$$

هي . [الجزء 2016]

$$|| \frac{2}{3} || = || \frac{10}{15} || = || \frac{2}{3} ||$$

إذا كان P =

$$|| \frac{2}{3} || = || \frac{10}{15} || = || \frac{2}{3} ||$$

[الجزء 2017]

$$|| \frac{2}{3} || = || \frac{10}{15} || = || \frac{2}{3} ||$$

كل من المتجهات متجه وحدة

$$|| \frac{2}{3} || = || \frac{10}{15} || = || \frac{2}{3} ||$$

[الجزء 2017]

$$|| \frac{2}{3} || = || \frac{10}{15} || = || \frac{2}{3} ||$$

فإن P =

$$|| \frac{2}{3} || = || \frac{10}{15} || = || \frac{2}{3} ||$$

$$|| \frac{2}{3} || = || \frac{10}{15} || = || \frac{2}{3} ||$$

متجه موضع النقطة P بالنسبة

لنقطة الأصل فإنه نقطة P =

[الإسماعيلية 2017]

س١ إذا كان $\vec{a} = (2, -1)$

$$\vec{b} = (-2, 6) \quad \vec{c} = (7, 14)$$

عبر عنه بـ بدلالة \vec{a}, \vec{b}

[الغربية 2016]

س٢ إذا كان $\vec{a} = (7, -2)$

اكتب الصورة القطبية للمتجه \vec{a}

[الغربية 2016]

س٣ إذا كان $\vec{a} = (2, -1)$

$$\vec{b} = (3, 4) \quad \vec{c} = (5, 6)$$

وكان $\vec{a} = 2\vec{b} - \vec{c}$ متوازيًا بـ

احسب له. [الفيج 2017]

س٤ إذا كانت $\vec{a} = (2, 3)$

احسب الصورة القطبية للمتجه \vec{a}

بـ بالنسبة لنقطة الأصل

(أسير 2016)

س٥ إذا كان $\vec{a} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$

وكان $\vec{a} = 6\vec{b} + 5\vec{c}$ متوازيًا بـ

احسب قيمة له. [قنا 2016]

س٦ إذا كان $\vec{a} = (3, 0)$

$$\vec{b} = (1, 3) \quad \vec{c} = (1, 1)$$

احسب قيمة $\vec{a} \cdot \vec{b}$. [مصر 2017]

س٧ إذا كان $\vec{a} = (2, -1)$

$$\vec{b} = (-2, 6) \quad \vec{c} = (7, 14)$$

احسب $\|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\|$

[جنوب سين 2017]

س٨ إذا كان $\vec{a} = 11\vec{b} - 11\vec{c}$

احسب قيمة له.

[خارج الكتاب]

س٩ ارسم $\vec{a} = (2, \frac{\pi}{4})$ في مستوى

إحداثي متعامد بـ مثل هندسيًا ثلاثيًا متساويًا

الموقع التالية بقطع مستقيمة موهبة في

نفس المستوى:

$$\vec{a} = 3\vec{b}, \quad \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}, \quad \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$$

تابع العمليات على المتجهات

١) طرح متجهين $\vec{P} - \vec{Q} = \vec{R}$

٢) $\vec{M} = \vec{N} - \vec{L}$

٣) $\vec{N} - \vec{M} = \vec{L} - \vec{S}$

المسألة ١٧

مثال

نحسب $\vec{P} - \vec{Q}$ حيث $\vec{P} = (3, -1)$ و $\vec{Q} = (1, 4)$
 حيث $\vec{P} = (3, -1)$ و $\vec{Q} = (1, 4)$
 حيث $\vec{P} = (3, -1)$ و $\vec{Q} = (1, 4)$
 حيث $\vec{P} = (3, -1)$ و $\vec{Q} = (1, 4)$

الحل

١) $\vec{P} - \vec{Q} = (3, -1) - (1, 4) = (2, -5)$

٢) $\vec{M} = \vec{N} - \vec{L} = (1, 4) - (3, -1) = (-2, 5)$

٣) $\vec{N} - \vec{M} = (3, -1) - (-2, 5) = (5, -6)$

٤) $\vec{N} - \vec{M} = (3, -1) - (-2, 5) = (5, -6)$

٥) $\vec{N} - \vec{M} = (3, -1) - (-2, 5) = (5, -6)$

نحسب $\vec{P} - \vec{Q}$ حيث $\vec{P} = (3, -1)$ و $\vec{Q} = (1, 4)$
 حيث $\vec{P} = (3, -1)$ و $\vec{Q} = (1, 4)$
 حيث $\vec{P} = (3, -1)$ و $\vec{Q} = (1, 4)$

شوية ملاحظات زي الفل

١) $\vec{P} = \vec{Q} + \vec{R}$

٢) $\vec{N} = \vec{M} + \vec{L}$

٣) $\vec{P} - \vec{Q} = \vec{R}$

٤) $\vec{P} = \vec{Q} + \vec{R}$

٥) إذا كان \vec{P} مثلث فانه $\vec{P} = \vec{Q} + \vec{R}$

٦) إذا كانت \vec{P} الشكل فيه متجهين \vec{Q} و \vec{R} حيث $\vec{P} = \vec{Q} + \vec{R}$

نتيجة الاول = ثابت x المتجه الثاني

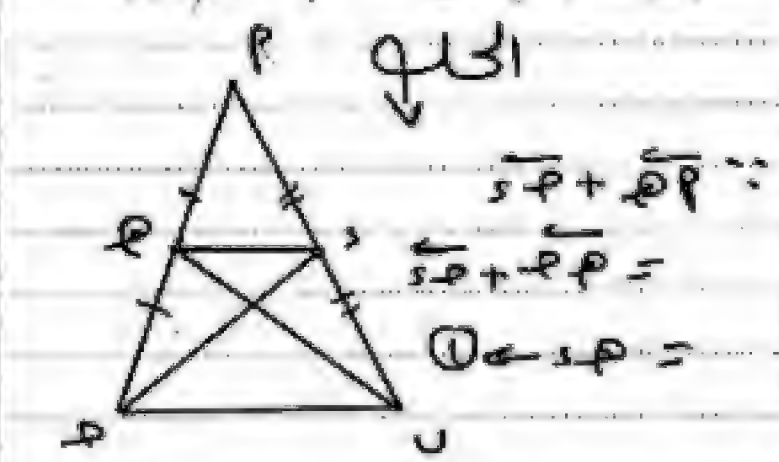
ملاحظات تاني

١) في $\vec{P} = \vec{Q} + \vec{R}$ إذا كان \vec{P} متجه \vec{Q} و \vec{R} فانه $\vec{P} = \vec{Q} + \vec{R}$

٢) إذا كان \vec{P} و \vec{Q} متجهين \vec{R} فانه $\vec{P} = \vec{Q} + \vec{R}$

مثال ٢

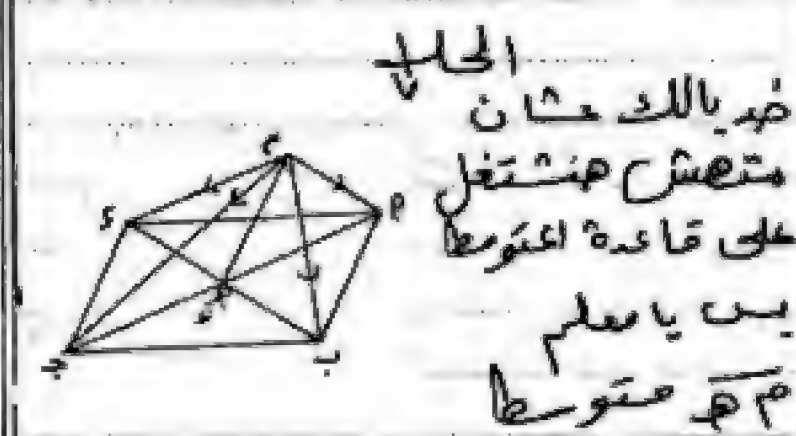
نقطة م من مستوي تقاطع قطريتين
 $\vec{PM} = \vec{PM}$ حيث ان
 $\vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM}$



١: $\vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM}$
 ٢: $\vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM}$
 ٣: $\vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM}$

مثال ٣

نقطة م من مستوي تقاطع قطريتين
 $\vec{PM} = \vec{PM}$ حيث ان
 $\vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM}$

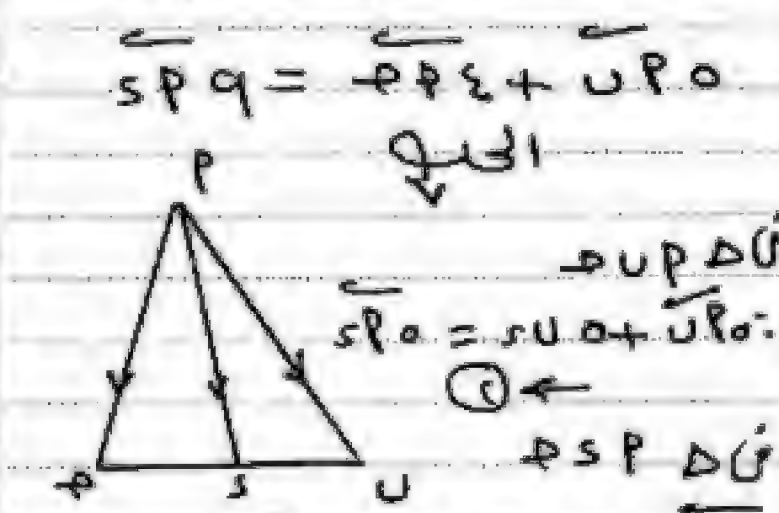


من $\vec{PM} = \vec{PM}$
 ويرضو $\vec{PM} = \vec{PM}$ متوالتين
 : $\vec{PM} = \vec{PM}$ حيث ان
 $\vec{PM} = \vec{PM}$

١: $\vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM}$
 ٢: $\vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM}$
 ٣: $\vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM}$
 ٤: $\vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM}$

مثال ٤

نقطة م من مستوي تقاطع قطريتين
 $\vec{PM} = \vec{PM}$ حيث ان
 $\vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM}$



١: $\vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM}$
 ٢: $\vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM}$
 ٣: $\vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM}$
 ٤: $\vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM} = \vec{PM} + \vec{PM}$

اذا كانت
 $\vec{PM} = \vec{PM}$
 فأنشئت ان
 $\vec{PM} = \vec{PM}$

الحل

مركز
 له جميع

الواجب

٧) UP و U كل رباعي فيه
 $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

أثبت أنه $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

٨) UP و U مستطيل فيه

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad (125) = \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad (125) = \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

ثم اوجد ابعاده من النقطة

٩) اذا كانت M نقطة تقاطع

الخطين UP و U نقطة خارج

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad (125) = \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

شغل دماغك يا معلم

١١) UP و U كل رباعي

باعد a, b, c و d متتصيات

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$ على الترتيب

أثبت أنه

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad \vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad \vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$$

١٢) من مستوى ابعاده متعامد

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad \vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad \vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$$

١) ابعاده كل من النقط U, P

٢) ما هو سطح المثلث UP

١١) UP و U متتصيات فيه

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad (125) = \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad (125) = \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

فئة له التي تجعل UP و d

٢) التي تجعل UP و d

٣) ابعاده UP و d

١٣) متتصيات c, b, a اذا كان $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad \vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$$

فأثبت أنه $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

١٤) UP و U متوازي ابعاده و متتصيات ابعاده

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$ على الترتيب

أثبت أنه $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$

١٥) UP و U متوازي ابعاده

أثبت أنه

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad \vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad \vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$$

١٦) من ابعاده اثبت ابعاده UP و U

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad \vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$$

١٧) UP و U كل رباعي فيه

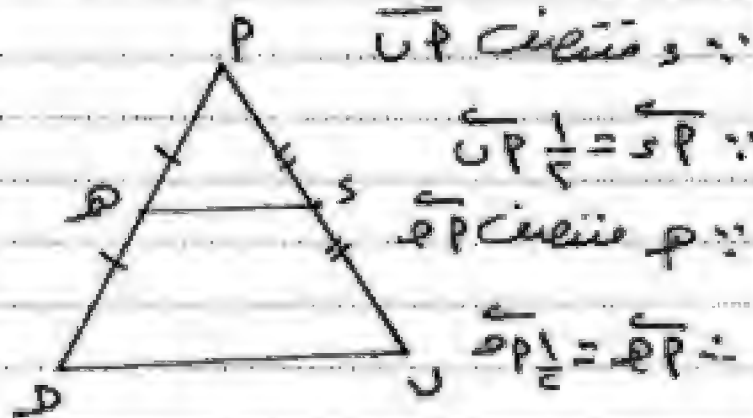
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad \vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$$

٢) ابعاده c, b, a اثبت أنه

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad \vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$$



تطبيقات على التجربات



١: ومثلت $\triangle PQR$

$$\therefore \frac{PM}{MQ} = \frac{PN}{NR} = 1$$

٢: ومثلت $\triangle PQR$

$$\therefore \frac{PM}{MQ} = \frac{PN}{NR} = 1$$

من $\triangle PQR$ (التي) $PM = MQ$ و $PN = NR$

من $\triangle PQR$ (التي) $PM = MQ$ و $PN = NR$

$$\frac{PM}{MQ} + \frac{PN}{NR} = 1 + 1 = 2$$

$$\therefore \frac{PM + PN}{MQ + NR} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\therefore \frac{PM}{MQ} = \frac{PN}{NR} = 1$$

$$\therefore \frac{PM}{MQ} = \frac{PN}{NR} = 1$$

$$\therefore \frac{PM}{MQ} = \frac{PN}{NR} = 1$$

$$\therefore \frac{PM}{MQ} = \frac{PN}{NR} = 1$$

مثال ٢

من $\triangle PQR$ (التي) $PM = MQ$ و $PN = NR$

من $\triangle PQR$ (التي) $PM = MQ$ و $PN = NR$

$$\therefore \frac{PM}{MQ} = \frac{PN}{NR} = 1$$

١: عبر به لاله PM و PN و MQ و NR

$$\therefore \frac{PM}{MQ} = \frac{PN}{NR} = 1$$

٢: اذا كانت $PM = MQ$ و $PN = NR$

من $\triangle PQR$ (التي) $PM = MQ$ و $PN = NR$

من $\triangle PQR$ (التي) $PM = MQ$ و $PN = NR$

من $\triangle PQR$ (التي) $PM = MQ$ و $PN = NR$

مثال ١ باستخدام التجارب اثبت

ان النقطة

من رؤوس مثلث قائم الزاوية

في

الحل

من $\triangle PQR$ (التي) $PM = MQ$ و $PN = NR$

$$\therefore \frac{PM}{MQ} = \frac{PN}{NR} = 1$$

$$\therefore \frac{PM}{MQ} = \frac{PN}{NR} = 1$$

$$\therefore \frac{PM}{MQ} = \frac{PN}{NR} = 1$$

$$\therefore \frac{PM}{MQ} = \frac{PN}{NR} = 1$$

$$\therefore \frac{PM}{MQ} = \frac{PN}{NR} = 1$$

$$\therefore \frac{PM}{MQ} = \frac{PN}{NR} = 1$$

$$\therefore \frac{PM}{MQ} = \frac{PN}{NR} = 1$$

$$\therefore \frac{PM}{MQ} = \frac{PN}{NR} = 1$$

مثال ٢ باستخدام التجارب

اثبت ان القطعة المستقيمة

المرسومة بين منطقتين ضلعتين

في مثلث قوازي الضلع الثالث

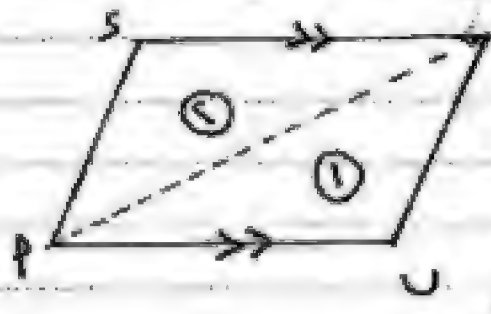
و طولها = $\frac{1}{2}$ طول

الحل

مثال ١ - استخدام التجزئة
أثبت أنه إذا كان متوازي أضلاع
فلما به متقابلان من أي شكل
رباعي فيه، ارضعاه الأضلاع
يكونان متساويين ومتوازيين
ويكون الشكل متوازي أضلاع

الحل

المعطى: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$



المطلوب:
 $AE \parallel BE$
 $DE = BE$

الفعل: نرسم EF

البرهان:

$\because AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$ (المعطى)

من ΔABE و ΔCDE : $\angle ABE = \angle CDE$ و $\angle BAE = \angle DCE$ (زاوية متبادلة)

من ΔABE و ΔCDE : $\angle ABE = \angle CDE$ و $\angle BAE = \angle DCE$ (زاوية متبادلة)

من ΔABE و ΔCDE : $\angle ABE = \angle CDE$ و $\angle BAE = \angle DCE$ (زاوية متبادلة)

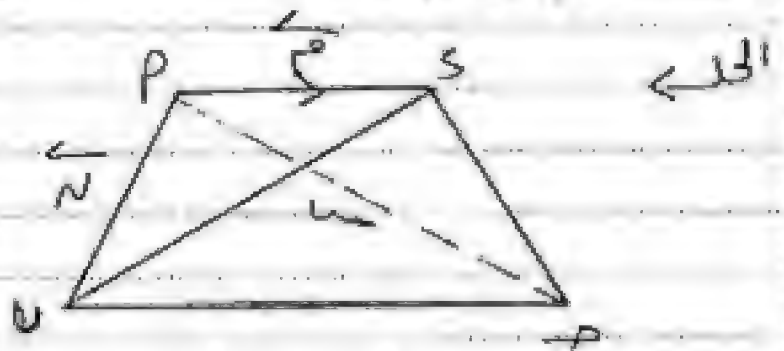
$\therefore \angle ABE = \angle CDE$ و $\angle BAE = \angle DCE$

$\therefore \angle ABE = \angle CDE$ و $\angle BAE = \angle DCE$

$\therefore \angle ABE = \angle CDE$ و $\angle BAE = \angle DCE$

\therefore الشكل $ABCD$ متوازي

أضلاع



$$\textcircled{1} \quad \vec{AB} = \vec{DC} \quad \vec{AD} = \vec{BC}$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$$

$$= \vec{BC} + \vec{CD}$$

$$\textcircled{3} \quad \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{BD}$$

$$\textcircled{4} \quad \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{BD}$$

$$= \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{BD}$$

في المثلثين الثاني

\therefore مثلث ABE و CD

\therefore مثلث ABE و CD

\therefore مثلث ABE و CD

ΔABE و CD

مثلث ABE و CD

$\therefore \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{BC} + \vec{CD}$

$\therefore (\vec{AB} + \vec{AD}) = (\vec{BC} + \vec{CD})$

$\therefore \vec{AB} = \vec{CD}$

\therefore مثلث ABE و CD

مثلث ABE و CD

\therefore مثلث ABE و CD

واحدة

ملاحظات حل مسائل الاشكال الرباعية

UP هي شكل رباعي

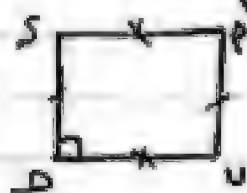
أولاً متوازي الاضلاع



$$\vec{UP} = \vec{SU}$$

$$\vec{UP} = \vec{SU}$$

ثانياً المستطيل

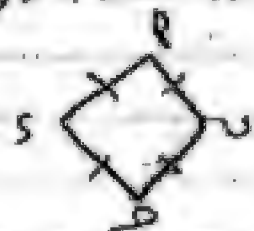


نثبت انه متوازي

$$\vec{UP} \perp \vec{SU}$$

أو

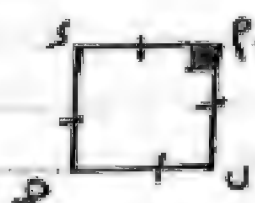
$$\vec{UP} = \vec{SU} \quad \text{أو} \quad \vec{UP} \perp \vec{SU}$$



المعين

$$\vec{UP} = \vec{SU}$$

$$\vec{UP} \perp \vec{SU} \quad \text{أو} \quad \vec{UP} \parallel \vec{SU}$$



المربع

نثبت انه متوازي

$$\vec{UP} = \vec{SU}$$

$$\vec{UP} \perp \vec{SU}$$

ملحوظة هامة

نقطة تلاقي متوسطات المثلث

$$P(1, 1, 1)$$

$$U(1, 1, 1)$$

$$= \left(\frac{1+1+1}{3}, \frac{1+1+1}{3}, \frac{1+1+1}{3} \right) = (1, 1, 1)$$

مثال

المثلث UP هي رؤس

$$P(1, 1, 1) \quad U(1, 1, 1)$$

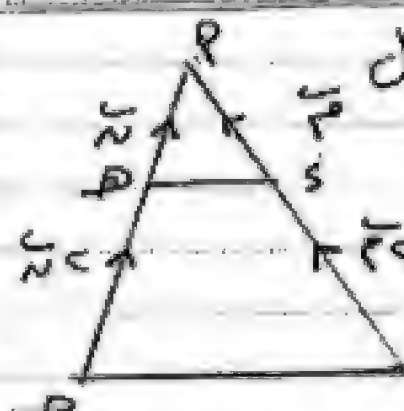
$$P(1, 1, 1) \quad U(1, 1, 1)$$

تلاقي متوسطات

$$= \left(\frac{1+1+1}{3}, \frac{1+1+1}{3}, \frac{1+1+1}{3} \right) = (1, 1, 1)$$

$$(1, 1, 1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

الشكل المقابل



UP مثلث فيه

$$\vec{UP} = \vec{SU}$$

$$\vec{UP} = \vec{SU}$$

$$\vec{UP} = \vec{SU}$$

$$\vec{UP} = \vec{SU} \quad \vec{UP} = \vec{SU} \quad \vec{UP} = \vec{SU}$$

أوجد UP بدلالة UP

ثم برهن UP // SU

مثالا

١٢٥ د شكل رباعي

فيه $P(120) \cup K(514) \cup M(811)$
 $S(-613)$ ثبت أن UP د مستطيل
 باستخدام المتجهات ثم اكتب محيطه



د مساحته
 المحيط

$$\therefore \vec{PK} = \vec{MS} = \vec{K} - \vec{P}$$

$$= (514) - (120) = (394)$$

$$\vec{KS} = \vec{PM} = \vec{S} - \vec{K} = (811) - (514) = (297)$$

$$= (297)$$

$$\vec{PK} = (394)$$

$$\therefore \vec{PK} = \vec{MS}$$

\therefore الشكل متوازي أضلاع

$$\therefore \vec{KS} = \vec{PM} = (297)$$

$$\text{ميل } \vec{PK} = \frac{y}{x} = \frac{394}{297} = 1.326$$

$$\therefore \text{ميل } \vec{PM} \times \text{ميل } \vec{PK} = 1 \times 1 = 1$$

$$\therefore \vec{PK} \perp \vec{PM}$$

\therefore الشكل UP د مستطيل

$$\|\vec{PK}\| = \sqrt{394^2 + 297^2} = 500$$

$$\|\vec{PM}\| = \sqrt{297^2 + 394^2} = 500$$

\therefore محيط المستطيل =

$$2(500 + 500) = 2000$$

← باستخدام المتجهات أثبت أن

$$\text{النقط } P(120) \cup M(811) \cup S(-613)$$

$$K(514) \cup M(811) \cup S(-613)$$

هي رؤوس معين

مثالا

إذا كانت

$$P(120) \cup M(811) \cup S(-613)$$

$$K(514) \cup M(811) \cup S(-613)$$

فأثبت باستخدام المتجهات أن
 الشكل UP د شبه منحرف

الحل

$$\therefore \vec{PK} = \vec{MS} = \vec{S} - \vec{P}$$

$$= (811) - (120) = (691)$$

$$\vec{KS} = \vec{PM} = \vec{M} - \vec{K} = (811) - (514) = (297)$$

$$= (297)$$

$$\therefore \vec{PK} = \vec{MS}$$

$$\therefore \vec{PK} \parallel \vec{MS}$$

$$\|\vec{PK}\| = \sqrt{691^2 + 297^2} = 750$$

$$\|\vec{MS}\| = \sqrt{297^2 + 691^2} = 750$$

$$\therefore \|\vec{PK}\| \neq \|\vec{MS}\|$$

$$\text{د ١ د ٢}$$

الشكل UP د شبه منحرف

$$\vec{H} = (v - p + o) \vec{u} + (-2 + c + u) \vec{v}$$

ب. المجموعه متزنة
∴ الحصلة = صفر

$$(-p + c) \vec{u} + (-2 + u) \vec{v} = \vec{0}$$

$$-p + c = 0 \Rightarrow c = p$$

$$-2 + u = 0 \Rightarrow u = 2$$

ب. اذا كانت القوى الاثني تؤثر

$$\vec{H} = 5 \vec{u} + 19 \vec{v}$$

$$4 \vec{u} = 6 \vec{u} - 3 \vec{u}$$

$$3 \vec{u} = -4 \vec{u} + 8 \vec{u}$$

في نقطه ماديّه احب مقدار
واجاه الحصلة هذه القوى

ب. اذا كانت القوى

$$\vec{H} = 1 \vec{u} + 3 \vec{v}$$

$$4 \vec{u} = p \vec{u} + \vec{v}$$

$$3 \vec{u} = 5 \vec{u} + \vec{v}$$

فأوجد قيمتي p و u اذا كانت

- ① المجموعه متزنة
- ② الحصلة = $5 \vec{u} - \vec{v}$
- ③ الحصلة = $2 \vec{u}$

مثال اذا كانت القوى

لانيوتن

$$\vec{H} = 5 \vec{u} + \vec{v}$$

$$4 \vec{u} = -2 \vec{u} + \vec{v} + \vec{v}$$

$$6 \vec{u} = 3 \vec{u} - \vec{v}$$

أوجد مقدار واتجاه الحصلة

الحل

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \vec{H}_3$$

$$\vec{H} = (5 - 2 + 3) \vec{u} + (1 + 1 - 1) \vec{v}$$

$$= 6 \vec{u} + 1 \vec{v}$$

المقدار $||\vec{H}|| = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}$

$\theta = 9.46^\circ$

الاتجاه θ

ظا $\theta = \frac{1}{6} \Rightarrow \theta = 9.46^\circ$

مثال اذا كانت $\vec{H} = (3 - 1) \vec{u}$

$$\vec{H} = p \vec{u} + c \vec{v}$$

$$3 \vec{u} = (-1 + u) \vec{u}$$

أوجد قيمتي p و c اذا كانت القوى متزنة

الحل

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \vec{H}_3$$

أ

مثال تتحرك سيارة P على طريق مستقيم بسرعة 80 كم/س

وتتحرك سيارة U على نفس الطريق بسرعة 60 كم/س أوجه سرعة P بالنسبة لـ U إذا كانت

① السيارات من اتجاه واحد

② السيارات من اتجاهين متضادين

③ نفس الاتجاه الحل

$$80 - 60 = 20 \text{ كم/س}$$

$$80 - 60 = 20 \text{ كم/س}$$

④ من اتجاهين متضادين

$$80 + 60 = 140 \text{ كم/س}$$

$$80 - 60 = 20 \text{ كم/س}$$

$$80 - 60 = 20 \text{ كم/س}$$

$$80 - 60 = 20 \text{ كم/س}$$

خلص بالك من السرعة النسبية

تذكر من المقرر الصف الثالث الابتدائي

$$80 - 60 = 20 \text{ كم/س}$$

$$80 - 60 = 20 \text{ كم/س}$$

$$80 + 60 = 140 \text{ كم/س}$$

الواجب

11. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838. 839. 840. 841. 842. 843. 844. 845. 846. 847. 848. 849.

فيہ $\{1, 9\} = U \setminus \{5-11\} = P$

$$(\mathcal{L}(\cdot)) = \mathcal{L}(\mathcal{L}(\wedge)) = \varnothing$$

أُقيمت باسمه في ١٣ المعونات في ١٤

الشكل SUP مع دة متطيل ثم أوجه

حبیب و صاحبہ

۶) ۴۵۰۰ شکر رباعی ضمیمه

$$(c, n) = p \cdot (m - 1) = 0 \cdot (c + m) \cdot p$$

5 = (310) أثبت باستخدام المبرهنات

وَبِهِ الشَّكْلُ ٥٢ مَعَ مَعِينِ ثُمَّ اَوْجِهْ

فیصلہ و مسامحتہ

4154. 1604. 1511.

[۳] من الشكل المقابل

dup و حبه مغز

فیه ۱۲۵۵

۱۹۳۵

$$\delta = \delta P$$
 $\dot{N} = 0.8$

5 = 5

اولاً عبر بدلائه من قوله عليه

فلا منكم ، أف ، أيا ، أيا ، أيا

(170/2610)

حل بقا

A. محطه قزو از سید

01118275262 (140211) ٢٩



١ في نظام إحداثي متعامد نقطة الأصل فيه : و (٠، ٠) عين النقطة : ٤ (-٤، ٠) و ب (٠، -٤)

جـ : ٢ (١، ٢) و ٤ (٨، ٢) لم أوجد :

١ متجه الموضع بالنسبة لنقطة الأصل (د) لكل من النقط ٤ ، ب ، جـ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.

٢ متجه الموضع للنقطة و بالنسبة لنقطة الأصل (د) بالصورة القطبية.

٣ معيار القطعة المستقيمة الموجهة \vec{AB}

٤ قيمة له التي تجعل $\vec{A} = \vec{B}$ له جـ

٢ في مستوى إحداثي متعامد ، نقطة الأصل و (٠، ٠) ، إذا كانت ٤ (١، -٤) و ب (٤، ٠)

جـ : ٢ (١، ٢) و ٤ (٥، ١)

١ أوجد : \vec{AB} ، \vec{AC} و \vec{BC} تكافئ جـ و

٢ إذا كانت : ب جـ تكافئ هـ و أوجد إحداثيي هـ :

٢ إذا كان : $\vec{A} = (٤، ١)$ ، $\vec{B} = (١، -١)$ و جـ = $(١٢، ١)$

١ أوجد بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين كلا من : ب - جـ ، $\frac{1}{2}(\vec{B} + \vec{C})$

٢ عبر عن : جـ بدلالة \vec{A} و ب

٢ أوجد بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين المتجه الذي يعبر عن :

١ قوة مقدارها ٢٠ نيوتن تؤثر على جسم ، وتعمل في اتجاه الشمال.

٢ إزاحة جسم مسافة ٥٠ سم في اتجاه ٣٠ شمال الغرب.

٣ السرعة المنتظمة لسيارة تقطع مسافة ٧٠ كم/س في اتجاه الغرب.

٢ إذا كان : $\vec{a} = ٢\vec{i} + ٣\vec{j}$ ، $\vec{b} = -٥\vec{i} - ١٠\vec{j}$ ، $\vec{c} = ٤\vec{i} + ١٠\vec{j}$

جـ : $\vec{c} = ٢\vec{i} + ٣\vec{j}$

١ أثبت أن : $\vec{a} // \vec{b}$

٢ أوجد : ب \Rightarrow ج إذا كان $\vec{c} \perp \vec{a}$ هل : ق \perp \vec{a} ؟ فسر إجابتيك.

٢ إذا كان : $\vec{A} = (٤، ١)$ ، $\vec{B} = (١، -١)$ و جـ = $(٢، -٢)$

١ أثبت أن : $\vec{A} // \vec{B}$ ، $\vec{B} \perp \vec{C}$ ، جـ $\perp \vec{A}$

٢ أوجد : $\vec{A} + \vec{B}$ ، $\vec{B} - \vec{C}$ ، $\frac{1}{2}\vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$ جـ

٢ إذا كان $\vec{A} = (١، -٤)$ ، $\vec{B} = (٢، ٣)$ و جـ = $(١٥، ١٥)$

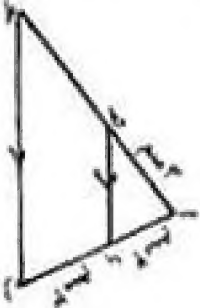
أوجد قيمتي ل و م إذا كان : ل $\vec{A} - \vec{B} = \vec{C}$ جـ

٢ إذا كان ٤ ب جـ متوازي أضلاع حيث ٤ (٢، -٢) ، ب (٤، -٢) و جـ (٢، ٢)

أوجد إحداثيي نقطة و

٢ في الشكل المقابل :

هـ $//$ ب جـ أوجد قيم ل و م ، هـ العددية إذا كان :



١ ب د = ل و أ

٢ ج د هـ = ل ح أ

٣ ب ج د هـ = م ح أ

٢ باستخدام المتجهات أثبت أن : قطري متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر.

٢ ب جـ مستطيل حيث : ٤ (١، -٢) ، ب (٥، ١) و جـ (٢، ٤) له

أوجد :

١ قيمة له

٢ إحداثيي نقطة و

٢ في مستوى إحداثي متعامد ، $\vec{A} = (٢، -٢)$ و جـ = $(١، -٤)$

أوجد :

١ إحداثيي كل من النقط : ٢ ، ب ، جـ

٢ مساحة سطح المثلث أ ب جـ (باستخدام المتجهات).

الوحدة تقسيم القطعة المستقيمة الثانية

ملامح هضات جامده هـ

١٢ إذا كان تقسيم من الداخل نترك النسبة موجبة

وإذا كانت التقسيم من الخارج فاءه النسبة سالبة (تغير أي شيء)
والأفضل يعني الأفضل بالسالب

١٣ لا تبديل ل (تحليل ل)

١٤ إذا كان هـ د م من الـ اهل ك هـ د م من الخارج

١٥ القانون هو $\frac{ل ا د + ل د ا}{ل + ل} =$ (الصورة المتغيرة)

١٦ الصورة الاحداثية $(ل د، ل د) = \left(\frac{ل ا د + ل د ا}{ل + ل}, \frac{ل ا د + ل د ا}{ل + ل} \right)$

١٧ احدثي منتصف قطعة مستقيمة
 $\left(\frac{ل ا د + ل د ا}{ل + ل}, \frac{ل ا د + ل د ا}{ل + ل} \right)$

١٨ احدثي متوسط المثلث

$\left(\frac{ل ا د + ل د ا}{ل + ل}, \frac{ل ا د + ل د ا}{ل + ل} \right)$

١٩ ثلاث اجزاء متساوية يبقى نسبة ١ : ٢

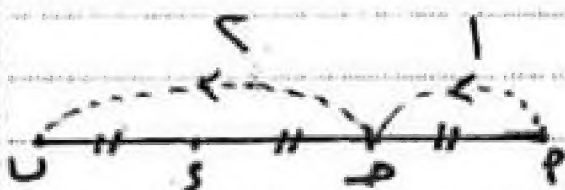
٢٠ إذا كان هـ د م وتقع من ربع امسافة يبقى ١ : ٢

٢١ فرق بين م ن م الفرق الاول هو (ل د، ل د) والثاني (ل د، ل د)

مثال ١ إذا كانت $P = (2, -1)$

$U = (5, -1)$ فأوجد إحداثيات
النقطتين M و N اللتين تقسمان
 \overline{PM} إلى ثلاثة أجزاء متساوية
الطول

الحل



\therefore تقسم M من الداخل بنسبة $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} =$$

$$\therefore M = \left(\frac{2+5}{3}, \frac{-1+(-1)}{3} \right) = (1, -1)$$

$$\therefore M = (1, -1)$$

\therefore منتصف PM

$$\therefore N = \left(\frac{2+1}{2}, \frac{-1+(-1)}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, -1 \right)$$

$$= (1.5, -1)$$

$$= (1.5, -1)$$

الاثبات أن النقط M و N تقع على
استقامه واحدة

$\leftarrow \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{PM}$ (باستخدام المتجهات)

$\leftarrow \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PN}$ (باستخدام المتجهات)

$\leftarrow \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN}$ (بالجمع بين المتجهات)

هنا $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PN}$

01118275262

٣٤

مثال ٢ إذا كانت $P = (2, -1)$

هي منتصف \overline{PM} حيث $M = (3, -1)$
فأوجد النقط N و O اللتين تقسمان
الخط

الحل

مثال ٣ إذا كانت $P = (2, -1)$

$U = (5, -1)$ فأوجد منتصف

$$\overline{PU} =$$

الحل

$$\text{المنتصف} = \left(\frac{2+5}{2}, \frac{-1+(-1)}{2} \right) =$$

$$= (3.5, -1)$$

\leftarrow إذا كانت $P = (2, -1)$

منتصف \overline{PM} حيث $M = (3, -1)$

$$U = (5, -1)$$

أوجد كلًا من N و O

Mr/Mostafa Fawaz
01118275262

أ. مصطفى فوزي سيد

مثال ٧ إذا كانت: $a = (1, 2)$

$b = (5, 1)$ و $c = (2, 6)$
 برر من ثلاث نواحي هندسية
 نقطة تلاقي متوسطاته
 الحل

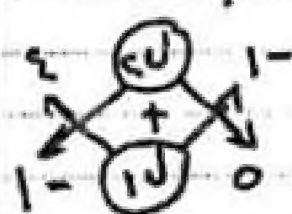
نفرض أن نقطة تلاقي متوسطاته هي

$$\therefore \left(\frac{1+5}{3}, \frac{2+1}{3} \right) = \left(\frac{6}{3}, \frac{3}{3} \right) = (2, 1)$$

$$= (2, 1)$$

مثال ٨ إذا كانت: $a = (1, 2)$

$b = (5, 1)$ و $c = (2, 6)$
 تقسم بمحاور السينات
 و الصادات نقطة التقسيم
 الحل



$$\therefore \frac{1+5}{3} = \frac{2+1}{3}$$

$$\therefore \frac{1+5}{3} = \frac{2+1}{3} \Rightarrow 1+5 = 2+1 \Rightarrow 6 = 3$$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

\therefore محور السينات يقسم ab من a إلى b
 بنسبة $1:2$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \Rightarrow 1+5 = 2+1 \Rightarrow 6 = 3$$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \Rightarrow 1+5 = 2+1 \Rightarrow 6 = 3$$

Kawo2

مثال ٩ أثبت أنه النقط

$$a = (1, 2) \quad b = (5, 1) \quad c = (2, 6)$$

تقع على استقامة
 واحدة
 الحل

باستخدام المبرهنات

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \Rightarrow 1+5 = 2+1 \Rightarrow 6 = 3$$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \Rightarrow 1+5 = 2+1 \Rightarrow 6 = 3$$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \Rightarrow 1+5 = 2+1 \Rightarrow 6 = 3$$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \Rightarrow 1+5 = 2+1 \Rightarrow 6 = 3$$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \Rightarrow 1+5 = 2+1 \Rightarrow 6 = 3$$

\therefore تقع على استقامة
 واحدة
 في جديتين مختلفتين

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \Rightarrow 1+5 = 2+1 \Rightarrow 6 = 3$$

\therefore تقسم ab بنسبة $1:2$

من الخارج
 \therefore تقسم bc بنسبة $1:2$ من
 الداخل

\therefore حل نفس المثال السابق

بطريقتين مختلفتين

(الحل - البعد)